

21世纪全国应用型本科电子通信系列实用规划教材



电路分析

主　编　王艳红　蒋学华　戴纯春
主　审　郭英彪



说　明

本书电子版仅提供给高校任课教师使用，如有任课教师需要全本教材浏览或需要本书课件等相关教学资料，请联系北京大学出版社客服，微信手机同号：15600139606，扫下面二维码可直接联系。

由于教材版权所限，仅限任课教师索取，谢谢！



21 世纪全国应用型本科电子通信系列实用规划教材

电 路 分 析

主　编　王艳红　蒋学华　戴纯春

副主编　黄丛生　刘淑娟

参　编　丁　宏　郭　峰

主　审　郭英彪

内 容 简 介

本书是按照教育部高等学校电子电气基础课教学指导分委员会 2004 年 8 月修订的《电路分析基础课程基本教学要求》编写的，包括电路的基本概念与定律、二端网络的等效、电路分析的基本方法、电路分析中的常用定理、电容元件与电感元件、正弦交流电路分析和相量模型、正弦稳态电路的功率、三相电路、电路的频率特性、耦合电感和理想变压器、一阶动态电路分析、二阶动态电路分析及双口网络，共 13 章，书中各章均列举了电路分析理论在实际中的应用例子，并给出计算机分析电路的方法，使学生能在掌握电路分析的基本定理和基本分析方法的同时，能将理论与实际更好地结合起来。

本书内容完整、深入浅出、通俗易懂、可读性强。在例题和习题的选择上，力争题型全面，有的例题给出多种解法。习题有填空、选择和计算多种题型，以帮助学生掌握理论知识，提高学生科学思维能力和实际应用能力。

本书可作为电子、通信、计算机、自动化、仪表测量类等专业相关课程的教材，也可供有关科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

电路分析/王艳红，蒋学华，戴纯春主编. —北京：北京大学出版社，2008.8

(21 世纪全国应用型本科电子通信系列实用规划教材)

ISBN 978-7-301-12179-5

Ⅰ. 电…　Ⅱ. ①王…②蒋…③戴…　Ⅲ. 电路理论—高等学校—教材　Ⅳ. TM13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 074916 号

书　　名：**电路分析**
著作责任者：王艳红　蒋学华　戴纯春　主编
策 划 编 辑：李　虎
责 任 编 辑：李婷婷　姜晓楠
标 准 书 号：ISBN 978-7-301-12179-5/TN・0026
出　版　者：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址：http://www.pup.cn　http://www.pup6.cn
电　　话：邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62750667　出版部 62754962
电 子 邮 箱：pup_6@163.com
印　刷　者：
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
787mm×1092mm　16 开本　24.25 印张　572 千字
2008 年 8 月第 1 版　　2016 年 12 月第 5 次印刷
定　　价：38.00 元

目　　录

第 1 章　电路的基本概念与定律

教学提示：电路分析的主要研究对象是电路。电路分析的主要变量是电流、电压和功率。电路中的理想元件有电阻、电压源、电流源和受控源等。基尔霍夫定律是分析电路的基本定律。

教学要求：本章应了解电路模型，电路的基本变量是什么？理解电流和电压的参考方向；了解理想电路元件特性；掌握独立电源与受控电源的联系与区别；重点掌握基尔霍夫定律。

1.1　电路与电路模型

电路分为实际电路和电路模型，在电路分析中所讨论的电路主要是电路模型。

1.1.1　电路

手电筒的实际电路如图 1.1 所示。

该电路的组成主要有提供电能的电池，简称电源(electric source)；小灯泡将电能转变为光能，称为负载(load)；连接电源与负载的是导线；开关是控制元件，控制电路的接通与断开。

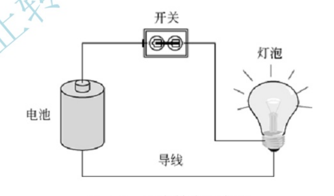


图 1.1　手电筒实际电路

1. 电路

电路(electric circuit)是电子元器件按一定方式连接构成的电流通路。有些实际电路是十分庞大和复杂的，可以延伸到数百千米以外，如电力系统及通信系统等；有的局限在几平方毫米以内，例如，集成电路芯片可能比指甲盖还小，但上面却有成千上万个晶体管相互连接的电路系统。超大规模集成电路的集成度越来越高，可容纳的元器件数目越来越多。有些电路非常简单，手电筒就是很简单的电路。

2. 电路的分类

实际电路按其作用和功能可分为两大类。

1) 进行能量的产生、传输、转换的电路

如电力系统的发电机组将其他形式的能量转换成电能，经变压器、输电线传输到各用

第 1 章　电路的基本概念与定律

教学提示：电路分析的主要研究对象是电路。电路分析的主要变量是电流、电压和功率。电路中的理想元件有电阻、电压源、电流源和受控源等。基尔霍夫定律是分析电路的基本定律。

教学要求：本章应了解电路模型，电路的基本变量是什么？理解电流和电压的参考方向；了解理想电路元件特性；掌握独立电源与受控电源的联系与区别；重点掌握基尔霍夫定律。

1.1　电路与电路模型

电路分为实际电路和电路模型，在电路分析中所讨论的电路主要是电路模型。

1.1.1　电路

手电筒的实际电路如图 1.1 所示。

该电路的组成主要有提供电能的电池，简称电源(electric source)；小灯泡将电能转变为光能，称为负载(load)；连接电源与负载的是导线；开关是控制元件，控制电路的接通与断开。

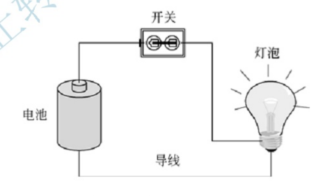


图 1.1　手电筒实际电路

1. 电路

电路(electric circuit)是电子元器件按一定方式连接构成的电流通路。有些实际电路是十分庞大和复杂的，可以延伸到数百千米以外，如电力系统及通信系统等；有的局限在几平方毫米以内，例如，集成电路芯片可能比指甲盖还小，但上面却有成千上万个晶体管相互连接的电路系统。超大规模集成电路的集成度越来越高，可容纳的元器件数目越来越多。有些电路非常简单，手电筒就是很简单的电路。

2. 电路的分类

实际电路按其作用和功能可分为两大类。

1) 进行能量的产生、传输、转换的电路

如电力系统的发电机组将其他形式的能量转换成电能，经变压器、输电线传输到各用

电部门，在那里又把电能转换成光能、热能、机械能等其他形式的能而加以利用，完成能量转换的功能。

2) 实现信号的传递与处理的电路

这种作用和功能在自动控制、通信、计算机技术等方面应用广泛。如电视机电路将接收到的电信号经过调谐、滤波、放大等环节的处理，使其成为人们所需要的图像和声音，完成电信号的处理、变换等功能。

1.1.2　电路模型

实际电路在工作时，所涉及的物理量很复杂，为了便于对电路进行分析研究，常将一个实际电路器件用理想元件来表示，所谓的理想电路元件就是在一定条件下忽略实际器件的次要性能，突出其主要性能，将实际器件抽象成有精确数学定义的假想元件。

用理想电路元件构成的电路叫做电路模型(circuit model)。

例如，电灯、电炉等器件通常用电阻元件来表征。电池、发电机等提供电能的实际器件或设备可以用电源元件来表征。

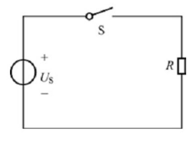


图 1.2　手电筒的电路模型

图 1.2 是手电筒电路的电路模型图，图中 U_S 是一个理想电压源，代替电池；R 是理想电阻元件，只消耗电能，代替灯泡；S 是开关元件；连接三个元件的细实线是理想导线，起着传输电能的作用。

可见，电路模型就是用抽象的理想元件及其组合近似地替代实际器件，从而构成了与实际电路相对应的电路模型。无论简单的还是复杂的实际电路，都可以通过理想化的电路模型充分地进行描述。

需要指出的是：理想电路元件不完全等同于电路器件，而一个电路器件在不同条件下的电路模型也可能不同。例如电炉主要是消耗电能转变为热能，一般用电阻元件表示；但若电路电源频率增大，则电路内的电阻丝产生的磁场能量就不能忽略，其模型就不能只用一个电阻元件表示，还需要包含电感。

当实际电路的尺寸 l 远小于其工作时的最高工作频率所对应的波长 λ 时，即

$$l \ll \lambda$$

式中，$\lambda = c/f$；$c = 3\times10^8\,\mathrm{m/s}$。

此时，可以用“**集总参数元件**”来构建实际器件的模型，每一种集总参数元件只存在一种能量转换关系，即只有电能消耗的元件为电阻，只有电场储能的元件为电容元件，只有磁场储能的元件为电感元件。**一个元件中只存在一种能量转换关系称为集总参数元件(也称为理想电路元件)，由集总参数元件组成的电路称为集总参数电路**(lumped parameter circuit)。

电路理论分析的对象为理想电路元件组成的电路模型，而非实际电路。

电路理论主要是研究电路的电磁现象，用电流、电压等物理量描述其中的物理过程。电路理论是一门研究电路分析与电路设计的基础工程学科。电路分析的任务是根据已知的电路结构和元件参数，在一定的外加电源(称为电路的“激励”)下，求解电路中的电压、电流(也称为电路的“响应”)。电路设计是研究如何构造一个电路，使其满足给定的性能

指标。学习电路分析是为电路设计打基础的。

本书的主要内容是介绍电路的基本定律和定理，并讨论电路的各种计算分析方法，为学习电子信息技术、电气技术、自动化和计算机技术等打下必要的理论基础。



思考与练习

1.1-1　电路一般由哪几部分组成？

1.1-2　电路图中的元件与实际工程中的电路器件有何不同？

1.2　电路的基本物理量

电路分析的任务是对给定的电路确定其电性能，而电路的电性能通常可以通过一组物理量来描述，最常用的便是电流、电压和功率。

1.2.1　电流

1. 电流的定义

带电粒子的定向运动形成电流，为了表征和描述电流的大小，**一般把单位时间内通过导体横截面的电量定义为电流**(electric current)，用符号 $i(t)$ 表示，即

$$i(t) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \tag{1.1}$$

习惯上把正电荷运动的方向规定为电流的方向。

如果电流的大小和方向都不随时间变化，这种电流称为恒定电流，或称直流电流(direct current，简写作 dc 或 DC)，一般用大写字母 I 表示。随时间变化的电流简称交流电流(alternating current，简写作 ac 或 AC)，常用英文小写字母 i 表示。

国际单位制中(SI)，电流的单位为安［培］，符号为 A，1 安=1 库/秒，即 1A=1C/s。在通信和计算机技术中常用毫安(mA)、微安(μA)作为电流单位。它们的关系是

$$1\text{A} = 10^3\,\text{mA} = 10^6\,\mu\text{A}$$

2. 电流参考方向

电流是一个有方向的物理量，在电路分析中，电流的大小和方向是描述电流变量不可缺少的两个方面。但是对于一个给定的电路，要直接给出某一电路元件中电流的真实方向是十分困难的，如交流电路中电流的真实方向经常在改变，即使在直流电路中，要指出复杂电路中某一电路元件电流的真实方向也不是一件很容易的事。在进行电路分析时，为了列写电路方程的需要，常常需要预先假设一个电流方向。**这个预先假设的电流方向叫做参考方向**(reference direction)，参考方向是在电路图中用箭头任意标定的电流方向，如图 1.3 所示。

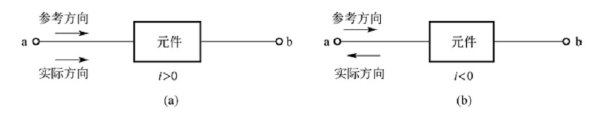


图 1.3　电流的参考方向

电流的参考方向可以任意选定，但一经选定，就不再改变。经过计算若求得 $i>0$ 时，表示电流的实际方向和参考方向一致；$i<0$ 则表示电流的实际方向和参考方向相反。

如图 1.3(a)所示，当 $i=5\text{A}$ 时，表示电流实际方向和参考方向都是从 $\text{a}\xrightarrow{\text{流向}}\text{b}$；当 $i=-5\text{A}$ 时，表示电流的实际方向从 $\text{b}\xrightarrow{\text{流向}}\text{a}$，如图 1.3(b)所示。

在进行电路分析时，必须先标出电流的参考方向，方能正确进行方程的列写和求解，题目中给出的电流方向均是参考方向。只有规定了参考方向，电流的正负才有意义。

1.2.2　电压

1. 电压的定义

电路中电场力将单位正电荷由 A 点移到 B 点时，失去或得到的能量(或电场力所做的功)称为 A，B 两点间的电位差，也是 A，B 间的电压(voltage)， 即

$$\boxed{u=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}q}} \tag{1.2}$$

不随时间变化的电压称为直流电压，其电压用大写 U 表示。交流电压是随时间变化的电压，常用小写字母 u 表示。

电压 u 的单位是伏特，简称伏(V)。常用电压单位还有千伏(kV)、毫伏(mV)、微伏(μA)。它们的关系是

$$1\times10^{-3}\text{kV}=1\text{V}=1\times10^{3}\text{mV}=1\times10^{6}\mu\text{A}$$

2. 电压的参考方向

如同电流标定参考方向一样，在进行电路分析时首先需对电压标定参考方向(也称为参考极性)，如图 1.4 所示，电压的参考方向是在元件或电路的两端用“+”、“−”符号来表示。“+”号表示高电位，“−”号表示低电位。

电压的参考方向可以任意选定，但一经选定，就不再改变。经过计算若求得 $u>0$ 时，表示电压的实际方向和参考方向一致；$u<0$ 则表示电压的实际方向和参考方向相反。另外还可以用双下标表示，例如，u_{ab} 表示 a、b 两点间电压的参考方向是从 a 指向 b 的(a 点高电位，b 点低电位)。

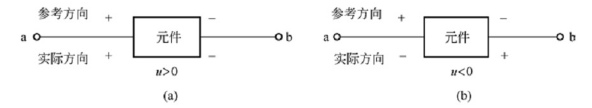


图 1.4　电压的参考方向

3. 关联参考方向

在以后的电路分析中，完全不必先考虑各电流、电压的实际方向究竟如何，而应首先在电路中标定它们的参考方向，然后按参考方向进行计算，由计算结果的正负值与标定的参考方向确定它们的实际方向，图中不需标出实际方向。参考方向可以任意选定，在图中相应位置标注(包括方向和符号)，但一经选定，在分析电路的过程中就不再改变。

为了分析电路方便，常将电压和电流的参考方向选得一致，称其为关联参考方向。

关联参考方向(associated reference direction)：如果指定流过元件电流的参考方向是从标以电压“+”极流向“−”极性的一端，即两者的参考方向一致，称电压、电流的这种参考方向为关联参考方向；否则称为非关联参考方向。如图 1.5(a)所示为关联参考方向，图 1.5(b)所示为非关联参考方向。

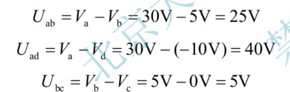


图 1.5　电压电流的关联参考方向与非关联参考方向

4. 电位

为了分析的方便，常在电路中选某一点为参考点，**把任一点到参考点的电压称为该点的电位(potential)**，参考点的电位一般选为零，所以，参考点也称为零电位点。

电位用 v 或 V 表示，单位与电压相同，也是 V(伏)。

[例 1.1] 在图 1.6(a)中，选 c 点为参考点时，已知 $V_a=30\text{V}, V_b=5\text{V}, V_d=-10\text{V}$，求：(1) U_{ab}，U_{ad}，U_{bc}；(2)选择 b 点为参考点时，求其他三点的电位值。

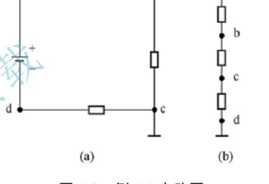


图 1.6　例 1.1 电路图

[解] (1) 图(a)电路中 a 点、b 点间的电压 U_{ab} 是 a 点与 b 点电位之差，电压就是电位差。

所以

$$U_{ab}=V_a-V_b=30\text{V}-5\text{V}=25\text{V}$$

$$U_{ad}=V_a-V_d=30\text{V}-(-10\text{V})=40\text{V}$$

$$U_{bc}=V_b-V_c=5\text{V}-0\text{V}=5\text{V}$$

(2) 若选 b 点为参考点，两点间的电压不变，这是因为无论选择电路中的哪一点作为参考点，都未改变电路的连接关系，因此任意两点间的电压不会改变。当选 b 点为参考点时，根据电位的定义，现在 $V_b=0$

$$U_{ab}=V_a-V_b$$

因为

$$U_{ab}=25\text{V}$$

$$U_{ab}=V_a-0=V_a=25\text{V}$$

$$U_{ad}=V_a-V_d=40\text{V}$$

所以

$$V_d=V_a-40=25\text{V}-40\text{V}=-15\text{V}$$

$$U_{bc}=V_b-V_c=0-V_c=5\text{V}$$

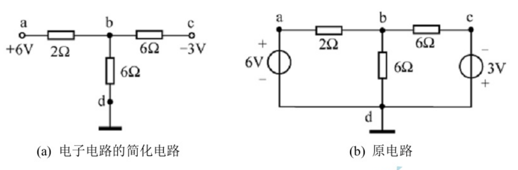
$$V_c=-5\text{V}$$

结论：电路中电位参考点可任意选择。当选择不同的电位参考点时，电路中各点电位均不同，电位具有相对性；但任意两点间电压保持不变，电压与参考点的选择无关，具有

唯一性。

在电子电路中，为了电路的简练醒目，对于一端接地(参考点)的电压源常不画出电源的符号，而只在电源的非接地的一端标出其极性及电压值。例如当图 1.6(a)电路选 d 为参考地点时，简化电路图如图 1.6(b)所示。

图 1.7(a)为电子电路的简化电路的习惯画法，图 1.7(b)为图(a)的原电路，参考点 d 是电源的公共端，注意电源的正负极性。



(a) 电子电路的简化电路　　(b) 原电路

图 1.7　电路与简化电路

1.2.3　功率与能量

1. 功率的定义

电路的基本功能之一是实现能量传输，为了描述和表征电荷和元件交换能量的快慢(速率)，下面引入功率这个物理量。

定义：电场力在单位时间内移动正电荷所做的功称为电功率，简称功率(power)。即

$$\boxed{p(t)=\frac{\mathrm{d}\,w(t)}{\mathrm{d}\,t}} \tag{1.3}$$

由于 $i(t)=\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$， $u(t)=\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}q}$，故电路的功率为

$$\boxed{p(t)=u(t)i(t)} \tag{1.4}$$

对直流电流和直流电压而言，功率记为

$$\boxed{P=UI} \tag{1.5}$$

功率的国际单位是瓦[特](W)，对大功率，采用千瓦(kW)或兆瓦(MW)；对小功率，采用毫瓦(mW)或微瓦(μW)。

$$1\mathrm{MW}=10^3\mathrm{kW}=10^6\mathrm{W}$$
$$1\mathrm{W}=10^3\mathrm{mW}=10^6\mu\mathrm{W}$$

2. 功率的计算

如图1.5(a)所示电路 N 的电压 u 和电流 i 取关联参考方向，故电路消耗的功率为

$$p(t)=u(t)i(t) \tag{1.6}$$

对于图1.5(b)，由于 N 电路的 u 和 i 取非关联参考方向，可将电压或电流视为关联参考方向的负值，此时功率计算公式应该写为

$$p(t)=-u(t)i(t) \tag{1.7}$$

根据电压和电流是否为关联参考方向，可以相应选用式(1.6)或式(1.7)计算功率p：

(1) 若$p>0$，则表示电路 N 确实消耗(吸收)功率；

(2) 若$p<0$，则表示电路 N 吸收的功率为负值，实质上它产生(提供或发出)功率。

[例 1.2] 已知图 1.5(b)所示电路图中$i=-4\text{A}$，$u=-6\text{V}$，求其功率。

[解] 因为图 1.5(b)中电压电流为非关联参考方向，利用式(1.7)，

$$p(t)=-ui$$
$$=-(-6)\times(-4)\,\text{W}=-24\text{W}$$

计算出功率$p<0$，表示 N 提供功率。

注意：计算功率时必须注意电压u和i的参考方向，还需注意公式中各数值的正负号的含义。

[例 1.3] 电路如图 1.8(a)所示，方框代表电源或电阻，各电压、电流的参考方向均已设定。已知$I_1=-2\text{A}$、$I_2=1\text{A}$、$I_3=3\text{A}$，U_1=20V、U_2=−14V、U_3=12V、U_4=−8V、U_5=−2V。试标出各元件的实际方向，并求各元件消耗或向外提供的功率，并验证是否满足功率守恒。

[解] 因为I_2、I_3、U_1、U_3为正值，所以其实际方向和参考方向一致，而I_1、U_2、U_4、U_5为负值，表明其实际方向与参考方向相反。电路图 1.8(b)标出了元件的实际方向，电压也可以用箭头表示极性由“+”指向“−”。

利用图 1.8(a)计算各功率

$$P_1=U_1I_1=20\times(-2)\,\text{W}=-40\text{W}\ (\text{提供})$$
$$P_2=U_2I_2=-14\times1\text{W}=-14\text{W}\ (\text{提供})$$
$$P_3=U_3I_3=12\times3\text{W}=36\text{W}\ (\text{吸收})$$
$$P_4=U_4I_1=(-8)\times(-2)\,\text{W}=16\text{W}\ (\text{吸收})$$

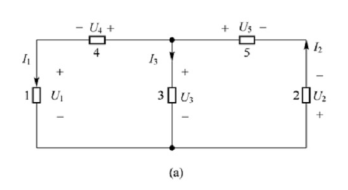
由图 1.8(a)知元件 5 电压与电流参考方向为非关联，元件 5 的功率为

$$P_5=-U_5I_2=-(-2)\times1\text{W}=2\text{W}\ (\text{吸收})$$

求功率的和有

$$P_1+P_2+P_3+P_4+P_5=0$$

也可以求得提供功率之和等于吸收的功率之和。



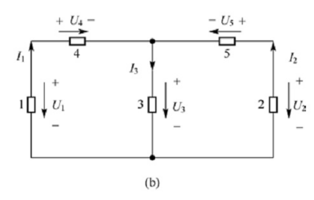


图 1.8　例 1.3 电路图

在电路中，所有的元件功率的代数和为零，也就是在任何时刻元件发出的功率等于吸收的功率，称为功率守恒。

3. 电能

从 t_0 到 t 的时间内，元件吸收(或提供)的电能用 W 表示为

$$W=\int_{t_0}^{t}p\mathrm{d}t=\int_{0}^{t}ui\mathrm{d}t \tag{1.8}$$

单位：焦［耳］，简称焦(J)。它表示功率为1W的用电设备在1s时间内所消耗的电能。实用中常用千瓦小时(kW·h)(俗称度)作电能单位，

$$1\text{ 度}=1\text{kW}\cdot\text{h}=10^3\text{W}\times3600\text{s}=3.6\times10^6\text{J}$$

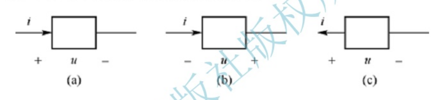
思考与练习

1.2-1　简述对电路中电流、电压设参考方向的意义。

1.2-2　一个 10kW 的加热器在 30min 内所消耗的能量是多少？

1.2-3　查找各种家用电器的耗电功率，1200W 烤面包器由 220V 线路取用多少电流？

1.2-4　试计算题 1.2-4 图中各元件吸收或提供的功率。



题 1.2-4 图

图(a)：$u=-2\text{V}, i=1\text{A}$　图(b)：$u=-3\text{V}, i=2\text{A}$

图(c)：$u=10\text{V}, i=5\text{e}^{-2t}\text{mA}$

(提供 2 W；吸收 6 W；提供 50e^{-2t}mW)

1.3　理想电路元件

电路元件是组成电路的最基本单元，它通过端子与外部相连接。按电路元件引出端子数目可分为二端元件、三端元件或四端元件等，还可分为无源元件和有源元件，线性元件和非线性元件，时不变元件和时变元件等。

电路分析中，二端理想电路元件主要有理想电阻元件、理想电感元件、理想电容元件、理想电源。本节将介绍理想电阻元件、理想电压源和电流源，其他元件将在后续章节中讲述。

1.3.1　电阻

1. 电阻元件定义与伏安关系

电路中最简单、最常用的元件是二端电阻元件，电阻元件是耗能的元件。电阻器、灯泡、电炉等在一定条件下可用二端电阻元件作为电路模型。

(1) **定义：若一个二端元件在任意时刻，其两端电压和电流之间的关系可用 $u\sim i$ 平面**

上的一条曲线决定，则此二端元件称电阻元件(resistor)，如图 1.9 所示。

电压的单位是伏(V)，电流的单位是安(A)，电阻元件的电压电流关系称为伏安特性或伏安关系(Voltage Current Relation，VCR)。

根据此定义有如下几种电阻元件。

① 若直线的斜率随时间变化(见图 1.9(a))，则称为线性时变电阻元件。

② 若电阻元件的 VCR 不是线性的(见图 1.9(b))，则称此电阻是非线性电阻元件。

③ VCR 在任意时刻都是通过 $u \sim i$ 平面坐标原点的一条直线，如图 1.9(c)所示，则称该电阻为线性时不变电阻元件，其电阻值为常量，用 R 表示。

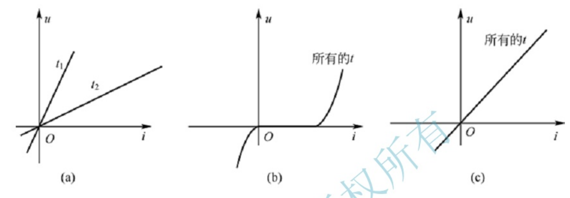


图 1.9　电阻的 $u \sim i$ 曲线图

本书重点讨论线性时不变电阻元件，简称为电阻元件。

可见，线性时不变电阻元件的伏安关系是一条通过原点的直线。R 为该直线的斜率，称为电阻元件的电阻，单位为欧姆，简称“欧”，符号为 Ω，$1\,\Omega$=1V/A。线性电阻元件也可以定义为：若电阻 R 值与其工作电压或电流无关，是一个常数，那么这样的电阻元件称为线性电阻元件。图 1.10 为电阻元件的符号。

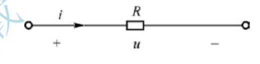


图 1.10　电阻元件符号

(2) 欧姆定律。

线性电阻的电压电流关系满足欧姆定律

$$\boxed{u(t) = Ri(t)} \qquad (u \text{ 和 } i \text{ 为关联参考方向}) \tag{1.9}$$

$$u(t) = -Ri(t) \qquad (u \text{ 和 } i \text{ 为非关联参考方向}) \tag{1.10}$$

式中，u 为电阻两端电压，i 为流过电阻的电流。

(3) 电导(G)。

电阻的倒数定义为电导(conductance)，以符号 G 表示，即

$$G = \frac{1}{R} \tag{1.11}$$

电导的 SI(国际)单位为西［门子］(S)，用电导表征电阻时，欧姆定律为：$i(t) = \pm Gu(t)$。

2. 电阻元件的性质

1) 电阻元件均是无记忆的

由式(1.9)可知，电阻的一个重要特性是在任一时刻，电阻端电压(或电流)由同一时刻的电流(或电压)所决定，而与过去的电压或电流无关。从这个意义上讲，电阻是一种无记忆元件或称即时元件。

2) 开路和短路

线性电阻当 $R=0$ (或 $G=\infty$)时，称为短路，短路时电阻两端电压为零；当 $R=\infty$ (或 $G=0$)时，称为开路，开路时流过电阻的电流为零。

理想导线的电阻值为零。

3) 电阻元件的功率

$$\boxed{p(t)=i^2(t)\cdot R=u^2(t)/R} \tag{1.12}$$

显然若 $R\geqslant 0$，则 $p(t)\geqslant 0$，为耗能元件是无源元件(passive element)，简言之，对所有 t，元件吸收的能量 $w(t)\geqslant 0$，这种元件称为无源元件，即无源元件从不向外电路提供能量。如果二端元件不是无源的，则此元件称为有源元件(active element)，通常我们遇到的电阻，大都属于耗能无源元件。

最后说一下实际电子元件的额定值问题。额定值就是为了保证安全、正常使用用电器具，制造厂家所给出的电压、电流或功率的限制数值。例如，一只灯泡上标明 220V，40W，即说明这样的含义：这只灯泡接电压为 220V，消耗功率为 40W。如果所接电压超过 220V，灯泡消耗功率大于 40W，就有可能将灯泡烧坏(不安全)；如果所接电压低于 220V，灯泡消耗功率小于 40W，会发暗，应用不正常，是大材小用，使用不合理。市售的碳膜、金属膜电阻，除标明电阻值以外，通常还标有 1/8W、1/4W、1/2W 及 2W 各挡额定功率；线绕电阻额定功率较大。在实际设计装配电路时，不但应按所需电阻值大小来选电阻，还应根据电阻在电路中所消耗的功率选择电阻型号。

[例 1.4] 求一只额定功率为 100 W、额定电压为 220 V 的灯泡的额定电流及电阻值。

[解] 由公式

$$P=UI=\frac{U^2}{R}$$

得

$$I=\frac{P}{U}=\frac{100}{220}\text{A}=0.455\text{A} \qquad R=\frac{U^2}{P}=\frac{220^2}{100}\Omega=484\Omega$$

[例 1.5] 4Ω 电阻上电压与电流为关联参考方向，已知电阻上的电流为 $i=2\sin t\,\text{A}$，求电压 u、功率 p 以及从 0 到 t 期间电阻吸收的电能(W)。

[解] 因为电压与电流为关联参考方向，利用欧姆定律

$$u=Ri=4\times 2\sin t=8\sin t\ \text{V}$$

功率为

$$p=ui=8\sin t\times 2\sin t=16\sin^2 t\ \text{W}$$

从 0 到 t 期间电阻吸收的电能(W)为

$$W=\int_0^t p\,\mathrm{d}\xi=\int_0^t 16\sin^2\xi\,\mathrm{d}\xi=16\left[\frac{1}{2}\xi-\frac{1}{4}\sin 2\xi\right]_0^t$$
$$=8t-4\sin 2t\ \ \text{J}$$

1.3.2　理想电压源

1. 理想电压源的定义

理想电压源是从实际电源抽象出来的一种电路模型，是有源元件。

若一个二端元件接到任何电路后，该元件两端电压总能保持给定的时间函数 $u_S(t)$，与通过它的电流大小无关，则此二端元件称为理想电压源(亦称独立电压源)，简称为电压源(voltage source)。图 1.11 为电压源的符号，图 1.11(a)表示电压源的一般符号，+、−号表示电压源电压的参考极性，u_S 为电压源的端电压值，可以用其表示交流电压源或直流电压源，表示直流电压源时 $u_S = U_S$；也常用图 1.11(b)来表示直流电压源，长线段代表正极，短线段代表负极，U_S 为电压源的端电压值。

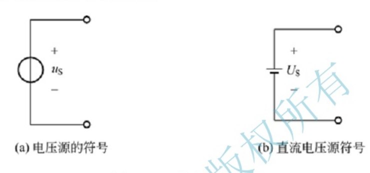


图 1.11　电压源的符号

2. 电压源的性质

电路图 1.12 为理想电压源的伏安特性图(VCR)。

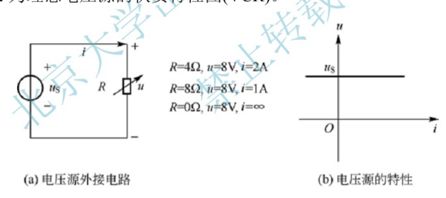


图 1.12　理想直流电压源的特性图

从定义和电压源外接电路图图 1.12 可知，当外接电阻变化时，电压不变，但电流值变化了。可看出它有两个基本性质。

1) 电压不变

其端电压是定值或是一定的时间函数，与流过的电流无关，因此也称为独立电压源，如图 1.12(b)所示，直流电压源的伏安特性为平行于电流轴的直线。

当 $u_S = 0$，电压源相当于短路，也就是说一个零值电压源相当于一条短路线。

2) 电流不定

电压源的电压是由它本身决定的，流过它的电流则是任意的，由电压源与外电路共同决定，其端口的电压、电流可表示为

$$u(t) = u_S(t) \qquad i(t) = \text{任意值}$$

3. 电压源的功率

若电压源与外电路连接，电压源自身的电压与电流的参考方向如果为非关联参考方向，可见图 1.12(a)，则电压源功率为

$$P = -u_{\mathrm{S}} i \tag{1.13}$$

当 $P>0$ 时，电压源吸收功率，处于充电状态，即负载状态；$P<0$ 时，电压源提供功率，处于供电状态，即电源状态。

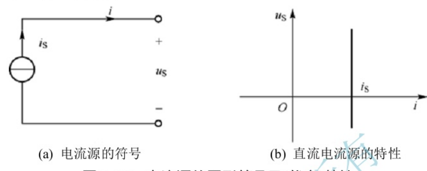


1.3.3　理想电流源

1. 理想电流源的定义

理想电流源也是从实际电源抽象出来的另一种电路模型，是有源元件。

如果一个二端元件的输出电流总能保持给定的电流，与该元件两端电压无关，则称此二端元件为理想电流源， 简称为电流源(current source)。其图形符号如图 1.13(a)所示，图中箭头表示电流源电流的参考方向。



(a) 电流源的符号　　(b) 直流电流源的特性

图 1.13　电流源的图形符号及(伏安)特性

当 i_S 为恒定值时，也称为直流电流源 I_S。电流源的伏安特性如图 1.13(b)所示。

2. 电流源的性质

当电流源接上外电路时，如图 1.14 所示。当外接电阻值变化时，输出电流值始终不变，但电压值改变了。

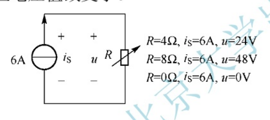


图 1.14　电流源外接电路

电流源的性质如下：

1) 电流不变

电流源发出的电流是定值 I_S 或一定的时间函数 $i_S(t)$，与两端的电压无关，也称独立电流源。当 $i_S(t)=0$，电流源相当于开路。

2) 电压不定

电流源的端电压是由电流源与外电路共同决定的，其端口的电流、电压可表示为

$$i(t)=i_S(t) \qquad u(t)=\text{任意值}$$

3. 电流源的功率

若电流源与外电路连接，电流源自身的电压与电流的参考方向如果为非关联参考方向，可见图 1.14，电流源的功率为

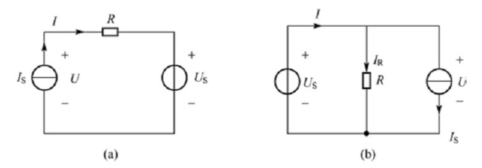
$$P=-ui_S \tag{1.14}$$

当 $P>0$ 时，电流源吸收功率，处于充电状态，即负载状态；$P<0$ 时提供功率，处于供电状态，即电源状态。

思考与练习

1.3-1　欧姆定律有时写为 $u=-Ri$。说明电阻值是负的，对吗？

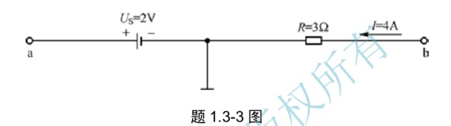
1.3-2　在题 1.3-2 图(a)、(b)中 $I_S = 1A$, $U_S = 1V$, $R = 1\Omega$。求各元件吸收的功率。



题 1.3-2 图

(图(a)中，$P_R = 1W$，$P_{U_S} = 1W$，$P_{I_S} = -2W$；(b)中 $P_R = 1W$，$P_{U_S} = -2W$，$P_{I_S} = 1W$)

1.3-3　求题 1.3-3 图所示电路中 V_a，V_b，U_{ab}。($V_a = 2V$，$V_b = 12V$，$U_{ab} = -10V$)



题 1.3-3 图

1.4　基尔霍夫定律

电路是电路元件互连而成的。电路中的各元件的电压、电流受到两类约束。一类是元件本身的伏安关系约束(如电阻元件的欧姆定律)；另一类是电路结构的约束。基尔霍夫定律就是描述后一种约束的基本定律，包括基尔霍夫电流定律(Kirchhoff's Current Law，KCL)和基尔霍夫电压定律(Kirchhoff's Voltage Law，KVL)。它反映了电路中所有支路电压和电流的约束关系，是分析集总参数电路的基本定律。基尔霍夫定律与元件伏安特性构成了电路分析的基础。

1.4.1　电路图的几个名词

1. 支路

一个二端元件称为一条支路(branch)。通常用 b 表示支路数。为了减少支路个数，往往将流过同一电流的几个元件的串联组合作为一条支路，如图 1.15 所示有三个支路，如 a－c－b 为一条支路，同理 a－d－b，a－e－b 为另两条支路。流过支路的电流称为支路电流。

2. 节点

三条或三条以上支路的连接点称为节点(node)。通常用 n 表示节点数。图 1.15 中 a、

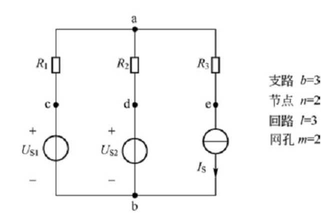
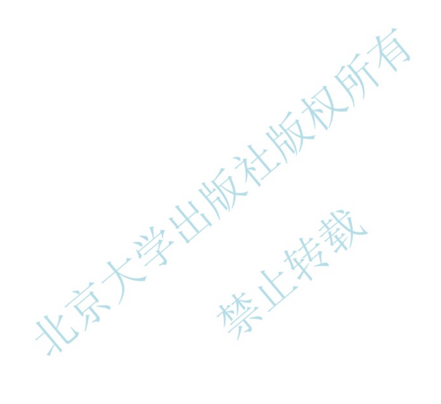


图 1.15　电路名词示意图

b 为节点。



3. 回路

回路(loop)是由支路组成的闭合路径。通常用 l 表示回路。图 1.15 中回路有三个，分别是：a－c－b－d－a，a－d－b－e－a，a－c－b－e－a。

4. 网孔

可以画在一个平面上而不使任何两条支路交叉的电路为平面电路，如图 1.15 所示。

对平面电路，其内部不含任何支路的回路称网孔(mesh)。网孔是回路，但回路不一定是网孔。如图 1.15 中有两个网孔 a－c－b－d－a，a－d－b－e－a。

1.4.2　基尔霍夫电流定律

基尔霍夫电流定律(简称KCL)描述了电路中与节点相连各支路电流之间的相互关系，它是电荷守恒在集总参数电路中的体现。

1. KCL 定律内容

在集总参数电路中，在任一时刻，任一节点上，流出(或流入)该节点的所有支路的电流的代数和为零。若规定流出该节点的电流为正，则流入该节点的电流为负，也可以反之假定，电流是流出节点还是流入节点，是根据电流的参考方向判断的。

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} i_k = 0} \tag{1.15}$$

KCL定律也可以表述为：对于集总参数电路中的任一节点，在任一时刻，流入该节点的电流之和等于流出该节点的电流之和。即

$$\boxed{\sum i_{入} = \sum i_{出}} \tag{1.16}$$

[例 1.6]　列出图 1.16 的 KCL 方程，如果已知 $i_1 = 5\text{A}$，$i_2 = 7\text{A}$，$i_4 = -1\text{A}$，求 $i_3 = ?$

图 1.16　例 1.6 电路图

[解]　对图 1.16 所示电路节点 a，利用 KCL 定律



$$\sum i = 0$$

流入节点 a 电流的代数和为零，即假定流入电流为正

$$i_1 - i_2 + i_3 - i_4 = 0$$

或流出节点 a 电流的代数和为零，即假定流出电流为正

$$-i_1 + i_2 - i_3 + i_4 = 0$$

或利用 KCL 方程：

$$\sum i_{入} = \sum i_{出} \qquad i_1 + i_3 = i_2 + i_4$$

由上式得

$$i_3 = i_2 + i_4 - i_1 = 7\text{A} + (-1)\text{A} - 5\text{A} = 1\text{A}$$

2. KCL 定律的说明

(1) KCL 实质上是电荷守恒原理在集总电路中的体现，即到达任何节点的电荷既不可能增加，也不可能消失，电流必须连续流动。

(2) 应用 KCL 列写方程时，首先要设出每一支路电流的参考方向，然后根据参考方向取符号：选流出节点的电流取正号则流入电流取负号，如果选流入节点的电流取正号则流出电流取负号，两种选择方法均可以，但在列写的同一个 KCL 方程中取号规则应一致。

(3) 应将 KCL 代数方程中各项前的正负号与电流本身数值的正负号区别开来。

(4) KCL 不仅适用于节点，而且适用于任何一个封闭曲面。对任意的封闭面 S，流入(或流出)封闭面的电流的代数和等于零。

图 1.17 为电子技术中经常使用的晶体管，其内部结构较复杂，但对封闭面来讲，仍符合基尔霍夫电流定律。所以对晶体管有：

$$I_e = I_c + I_b$$

[例 1.7] 图 1.18 中已知 $I_2 = -1A$， $I_4 = 3A$， $I_6 = 4A$。求电流 I_1, I_3, I_5 的值。

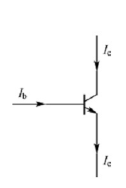


图 1.17　晶体管

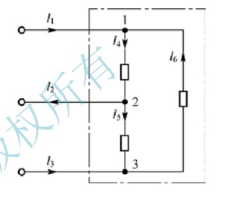


图 1.18　例 1.7 电路图

[解] 对节点 1 有 KCL 方程：$I_1 + I_6 = I_4$，得

$$I_1 = I_4 - I_6 = 3 - 4 = -1A$$

对封闭面有：$I_1 + I_3 = I_2$，得

$$I_3 = I_2 - I_1 = (-1) - (-1) = 0A$$

对节点 3 有 KCL 方程　　$I_5 + I_3 = I_6$　　$I_5 = I_6 = 4A$

[例 1.8] 在图 1.19 所示电路中，已知 $R_1 = 2\Omega$， $R_2 = 5\Omega$， $U_S = 10V$。求各支路电流。

[解] 首先设定各支路电流的参考方向如图 1.19 所示，由于 $U_{ab} = U_S = 10V$，根据欧姆定律，有

$$I_1 = \frac{U_{ab}}{R_1} = \frac{10}{2}A = 5A$$

$$I_2 = -\frac{U_{ab}}{R_2} = -\frac{10}{5}A = -2A$$

由 KCL，节点 a 的电流方程有

$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

$$I_3 = I_1 - I_2 = 5A - (-2)A = 7A$$

图 1.19　例 1.8 电路图

1.4.3　基尔霍夫电压定律

基尔霍夫电压定律(简称KVL)描述了回路中各支路(元件)电压之间的约束关系，它是能量守恒在集总参数电路中的体现。

1. KVL 定律内容

对于集总参数电路，在任一时刻、沿任一回路绕行一周，各支路(元件)的电压降的代数和为零。

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} u_k = 0} \tag{1.17}$$

KVL 定律也可以表述为：在任意时刻，沿任意回路绕行一周，回路中各元件上的电压升之和等于电压降之和。即

$$\boxed{\sum u_{升} = \sum u_{降}} \tag{1.18}$$

[例 1.9] 在电路图 1.20 中，已知 $u_1 = 1\text{V}, u_3 = -3\text{V}, u_4 = 5\text{V}$，求，$u_2 = ?$

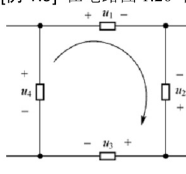


图 1.20　例 1.9 电路图

[解] 应用 KVL 列写回路电压方程，首先要先选定回路的绕行方向。规定元件电压参考方向与绕行方向一致时取正，相反时取负

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 = 0$$

所以

$$u_2 = u_1 + u_3 - u_4 = [1 + (-3) - 5]\text{V} = -7\text{V}$$

也可以利用式(1.18) $u_2 + u_4 = u_1 + u_3$，同样可以求得 $u_2 = -7\text{V}$。

2. KVL 定律的说明

(1) KVL 实质上是能量守恒原理在集总电路中的体现。因为在任何回路中，实际上是从某一点出发又回到该点时，电位的升高与降低是相等的。

(2) 应用 KVL 列写方程步骤是：首先对回路中各元件电压要规定参考方向；并设定回路的绕行方向，选顺时针绕行和逆时针绕行均可。凡元件电压参考方向(由“+”极到“−”极的方向)与绕行方向相同者取“+”，反之取“−”。

(3) 应将 KVL 代数方程中各项前的正负号与电压本身数值的正负号区别开来。

(4) KVL 可推广应用于开路电路。图1.21中，无闭合回路，可以在a、b之间假设有一假想支路U_{ab}，与其他元件构成一个假想回路。可以列出下面的KVL方程：

$$-u_1 + u_2 + u_3 - u_4 + u_5 - u_{\text{ab}} = 0$$

$$u_{\text{ab}} = -u_1 + u_2 + u_3 - u_4 + u_5$$

[例 1.10] 电路图如 1.22 所示，求电阻 R_1，R_2和电压u_{ed}，u_{bd}。

[解] 在节点 a，利用 KCL

$$I_1 = 5\text{A} + (-4)\text{A} = 1\text{A}$$

在节点 e，利用 KCL

$$I_2 = 1\text{A} + (-4)\text{A} = -3\text{A}$$

在回路 becb 中，利用 KVL 和欧姆定律

$$1 \times R_1 + (-3) \times 3 = 5\text{V} \qquad R_1 = 14\Omega$$

在回路 aecda 中，利用 KVL 和欧姆定律

$$(-4) \times 1 + (-3) \times 3 + 1 \times R_2 + 3 = 0$$

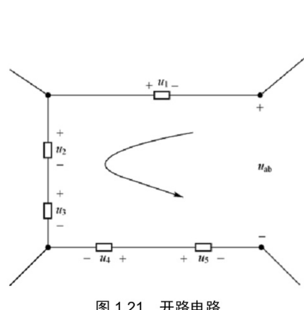


图 1.21　开路电路

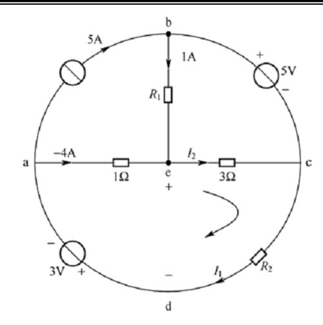


图 1.22　例 1.10 电路图

求得

$$R_2 = 10\Omega$$

在假想回路 ecde 中，利用 KVL 和欧姆定律

$$u_{ed} = (-3)\times 3 + 1\times R_2 = -9\text{V} + 10\text{V} = 1\text{V}$$

$$u_{bd} = 1\times R_1 + u_{ed} = 14\text{V} + 1\text{V} = 15\text{V}$$

u_{ed}、u_{bd} 还有哪些求法？

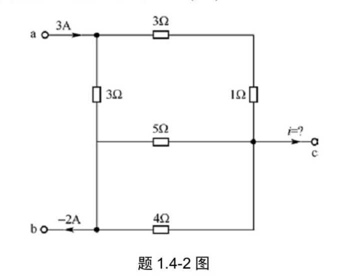
在求解此题中利用了 KCL、KVL 和欧姆定律，它们是电路分析的基本依据。

KCL，KVL 定律与电路支路元件性质无关，只取决于电路的连接结构，这种结构约束称为拓扑约束；欧姆定律取决于支路元件的伏安关系，称为元件约束。利用两类约束可以直接列写电路方程求解电路的各个变量。

思考与练习

1.4-1　说明基尔霍夫定律的应用的条件，应用时应注意的问题。

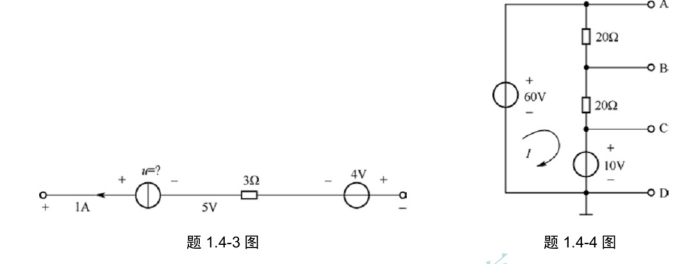
1.4-2　求题 1.4-2 图所示电路中的电流 i。(5A)



题 1.4-2 图

1.4-3　求题 1.4-3 图所示电路中电流源的端电压 u。(12V)

1.4-4　求题 1.4-4 图所示电路的电位 U_A、U_B、U_C。(60V、35V、10V)



题 1.4-3 图　　题 1.4-4 图

1.5　受　控　源

在电子电路中，常会遇到另一种性质的电源，它们有着电源的一些特性，但它们的电压或电流又不像独立电源那样不受电路中其他支路电压、电流影响，而是受电路中某个电压或电流的控制。这种电源称为受控源，也称为非独立源(controlled source or dependent source)。

1.5.1　受控源的定义

所谓的受控源，也是一种电源，其输出电压或电流受电路中其他地方的电压或电流控制，即依靠其他支路的电流或电压向外电路提供电流或电压的元件。

受控源是一种有源元件，是四端元件，由两条支路组成：其中一条支路是控制支路，另一条是被控制支路。被控制支路的电压或电流受控制支路上的电压或电流的控制，是受控的电压源或受控的电流源。

受控源是根据某些电子器件中电压与电流之间存在一定控制与被控制关系的特性建立起来的理想化电路模型。

例如，晶体管的集电极电流受基极电流的控制，在画晶体管的电路模型时就要用到电流控制的电流源。

1.5.2　受控源的分类

受控源就本身的性质而言分为受控电压源和受控电流源两种，依其控制量的性质可分为电压控制受控源和电流控制受控源，控制变量和受控变量的不同组合，将形成四种类型的受控源。

图 1.23 为四种类型的受控源。

(1) 电压控制电压源(VCVS)，其输入控制量为电压 u_1，输出是电压 u_2，$u_2 = \mu u_1$ 式中的控制系数为 μ 是无量纲常数，称为转移电压比，或电压放大倍数。

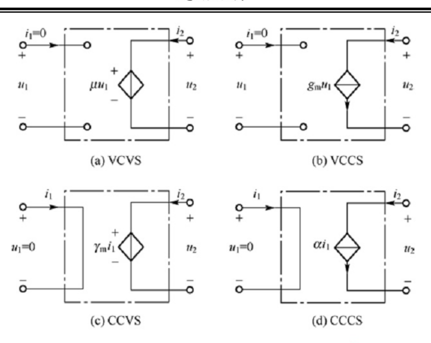


图 1.23　四种受控源

(2) 电压控制电流源(VCCS)，其输入控制量为电压 u_1，输出是电流 i_2， $i_2 = g_m u_1$ 式中的控制系数为 g_m 是电导的量纲，称为转移电导。

(3) 电流控制电压源(CCVS)，其输入控制量为电流 i_1，输出是电压 u_2， $u_2 = \gamma_m i_1$ 式中的控制系数为 γ_m 是电阻的量纲，称为转移电阻。

(4) 电流控制电流源(CCCS)，其输入控制量为电流 i_1，输出是电流 i_2， $i_2 = \alpha i_1$ 式中的控制系数为 α 是无量纲常数，称为转移电流比，或电流放大系数。

图 1.23 中用菱形符号表示受控电压源或受控电流源，以示与独立电源区别。图中 μu_1, $g_m u_1, \gamma_m i_1, \alpha i_1$ 是受控电源的值，由两部分组成，$\mu, g_m, \gamma_m, \alpha$ 为控制系数，另一部分是控制量，当控制系数为常数时，被控量与控制量成正比。这种受控源就是线性受控源，本书只讨论线性受控源，并将“线性”两字略去，简称受控源。

在表示含有受控源的电路图中，一般不必像图 1.23 所示那样专门标出控制支路及受控支路，而只需在相关支路上标明各控制量(电压或电流)和受控源即可，如图 1.24 所示，图中标出控制量 U，受控电压源为 $6U$。

[例 1.11] 图 1.24 所示电路，求电压 U 和电流 I。

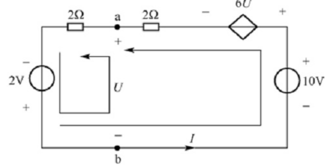


图 1.24　例 1.11 电路图

[解] 在图 1.24 电路中，$6U$ 为电压控制的电压源，可以将其先看做独立电压源，利用 KVL 列方程，在大回路中有

$$4I + 6U - 10 - 2 = 0$$

找出控制量 U 所在位置，对小回路列 KVL 方程则

$$2I - 2 - U = 0$$

联合求解上两式得

$$U = 1\text{V} \qquad I = 1.5\text{A}$$

[例 1.12] 图 1.25(a)电路中，已知 $R_1 = R_2 = 3\Omega$，$R_3 = 60\Omega$，$\alpha = 8$，$u_S = 10\text{mV}$，求电压 u_o。

[解] 图 1.25(a)中的受控源是 CCCS，一般只在电路中画出受控源的符号，标出控制量的位置和方向就可以，图 1.25(b)为简化图，利用图(b)求解较简便。

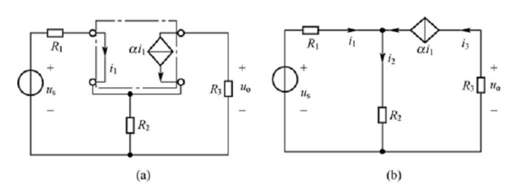


图 1.25　例 1.12 电路图

利用 KCL 知

$$i_1 + i_3 = i_2$$

又因为 $i_3 = \alpha i_1$　$\alpha = 8$，代入上式

$$i_2 = i_1 + i_3 = 9i_1$$

在左边的回路中，利用 KVL 和欧姆定律列方程

$$u_S = R_1 \times i_1 + R_2 \times i_2 = 3i_1 + 3 \times 9i_1 = 30i_1$$

求得

$$i_1 = \frac{1}{3}\text{mA}$$

在右边的回路中

$$u_o = -i_3 R_3 = -\alpha i_1 R_3 = -8 \times \frac{1}{3} \times 60\text{mV} = -160\text{mV}$$

计算结果表明：u_o 的数值比 u_S 大 16 倍，可见由受控源和电阻组成的电路起放大电压作用。

从例题中可知：含受控源的电路仍满足两类约束，在列 KVL、KCL 方程时，一要将受控源暂时当做独立源来列方程；二要找出控制量与求解值的关系，代入列出的方程求得答案。

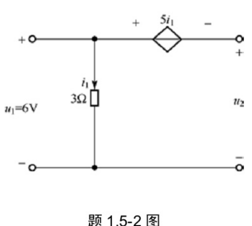
思考与练习

1.5-1　受控源是什么元件？与独立源的区别在哪里？分析含有受控源的电路时如何处理受控源？

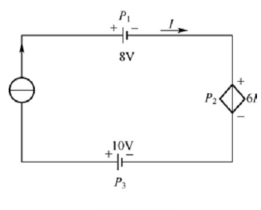
1.5-2　题 1.5-2 图所示电路中，求：电压 u_2。

1.5-3　题 1.5-3 图的电路中，求 $I = -3\text{A}$ 时吸收的功率 P_1，P_2，P_3。

$$(P_1 = -24\text{W}，P_2 = 54\text{W}，P_3 = 30\text{W})$$



题 1.5-2 图



题 1.5-3 图

1.6　电阻的应用

电阻器是电路元件中应用最广泛的一种，在电子设备中约占元件总数的 30%以上，其质量的好坏对电路工作的稳定性有极大影响。它的主要用途是稳定和调节电路中的电流和电压，其次还作为分流器、分压器和负载使用。

1.6.1　电阻的标识法

1. 标称电阻

电阻产品上标示的阻值，其单位为Ω(欧)，kΩ(千欧)、MΩ(兆欧)，有时还以Ω，k、M 代替小数点，例如 5.1kΩ 表示为 5k1；而电阻上标识为 2Ω7 表示为 2.7Ω。

2. 色环标识法

色环电阻使用较广泛，看色环可以读出阻值，使用很方便。色标电阻可分为四环和五环两种标识方法，其中五色标识法常用于精密电阻。带有四个色环的电阻其中第一、二环分别代表阻值的前两位数，第三环代表倍率，第四环代表误差。不同环数和不同颜色都有不同的含义，如表 1.1 所示。

表 1.1　电阻色环颜色所代表的数字或意义

色环颜色	棕	红	橙	黄	绿	蓝	紫	灰	白	黑	金	银	无色
有效数字 第一二色环	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0			
应乘倍数 第三色环	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8	10^9	1	0.1	0.01	
误差(%)											±5	±10	±20

图 1.26 为电阻色环标识法，查表 1.1 可知黄色读数为 4，紫色读数为 7，橙色在第三色环为倍数 10^3，所以电阻的读数为 $47\times10^3\Omega = 47\text{k}\Omega$。

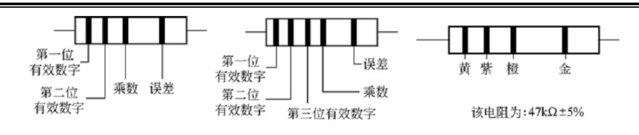


图 1.26　电阻色环标识法

1.6.2　电阻的选用

根据电子设备的技术指标和电路的具体要求选用电阻的型号和误差等级；额定功率应为实际消耗功率的1.5～2倍；根据电路工作频率选择不同类型的电阻，选用电阻除了要考虑阻值、额定功率、最高工作电压外，有时要关心稳定性、噪声电动势及高频特性。图1.27为常用的电阻器。

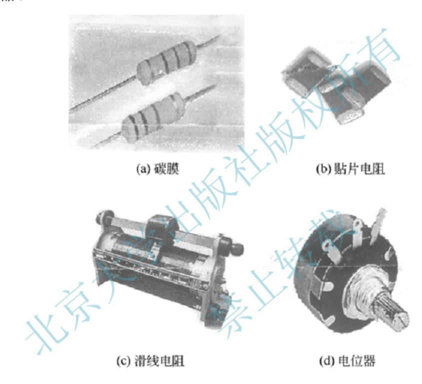


图 1.27　常用的电阻

电阻装接前要测量核对，尤其是要求较高时，还要人工老化处理，提高稳定性。

电阻器的检测方法如下所示。

1. 固定电阻器的检测

将万用表的欧姆挡的两表笔(不分正负)分别与电阻的两端引脚相接即可测出实际电阻值。测试时，特别是在测几十千欧以上阻值的电阻时，手不要触及表笔和电阻的导电部分；被检测的电阻要从电路中焊下来，至少要焊开一个头，以免电路中的其他元件对测试产生影响，造成测量误差；色环电阻的阻值虽然能以色环标志来确定，但在使用时最好还是用万用表测试一下其实际阻值。

2. 电位器的检测

检查开关电位器时，首先要转动旋柄，看看旋柄转动是否平滑，开关是否灵活，开关通、断时“喀哒”声是否清脆，并听一听电位器内部接触点和电阻体摩擦的声音，如有“沙沙”声，说明质量不好。用万用表测试时，先根据被测电位器阻值的大小，选择好万用表的合适电阻挡位，然后可按下述方法进行检测。用万用表的欧姆挡测“1”、“3”两端，其读数应为电位器的标称阻值，如万用表的指针不动或阻值相差很多，则表明该电位器已损坏。

检测电位器的活动臂与电阻片的接触是否良好。用万用表的欧姆挡测“1”、“2”(或“2”、“3”)两端，将电位器的转轴按逆时针方向旋至接近“关”的位置，这时电阻值越小越好。再顺时针慢慢旋转轴柄，电阻值应逐渐增大，表头中的指针应平稳移动。当轴柄旋至极端位置“3”时，阻值应接近电位器的标称值。如万用表的指针在电位器的轴柄转动过程中有跳动现象，说明活动触点有接触不良的故障。

3. 压敏电阻的检测

用万用表的 R×1k 挡测量压敏电阻两引脚之间的正、反向绝缘电阻，均为无穷大，否则，说明漏电流大。若所测电阻很小，说明压敏电阻已损坏，不能使用。

4. 光敏电阻的检测

用一黑纸片将光敏电阻的透光窗口遮住，此时万用表的指针基本保持不动，阻值接近无穷大。此值越大说明光敏电阻性能越好。若此值很小或接近为零，说明光敏电阻已烧穿损坏，不能再继续使用。

将一光源对准光敏电阻的透光窗口，此时万用表的指针应有较大幅度的摆动，阻值明显减小。此值越小说明光敏电阻性能越好。若此值很大甚至无穷大，表明光敏电阻内部开路损坏，也不能再继续使用。

电阻的具体种类很多，选用时要注意具体使用要求。

1.7 小　结

1. 电路模型

若将实际电路中各实际部件都用它们的模型表示，这样所画出的图称为电路模型图。电路理论研究的对象是电路模型，简称为电路。

2. 电路中的基本变量：电流、电压、功率

(1) $i = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$ 表示电流，单位为安(A)。首先要标注电流的参考方向，否则电流的正负值没有意义。

(2) 电位之差称电压。即 $u = \mathrm{d}w/\mathrm{d}q$ ，单位为伏(V)；电压的实际方向总是从高电位指向低电位的方向，即电位降落的方向。分析电路，首先要标注电压的参考方向(极性)，否则电压的正负值没有意义。

(3) 在电路中任选一个参考节点，叫做零电位点。电路中从其他节点到参考节点的电压，称为该节点的电位。

(4) 某个电路元件上电压和电流的参考方向可以各自假定，但为了方便，电压和电流常采用一致的参考方向，称为关联参考方向。

(5) 做功的速率称功率，即 $p = \mathrm{d}w/\mathrm{d}t$，单位为瓦(W)。某个电路元件的功率定义为 $p = u \cdot i$ (关联参考方向)或 $p = -u \cdot i$ (非关联参考方向)。

3. 电路的理想元件

(1) 线性电阻满足欧姆定律 $u = Ri$。

(2) 电压源的电压是一特定时间函数 $u_S(t)$，与流过的电流大小、方向无关；流过电压源的电流由 $u_S(t)$ 和外电路共同确定。

(3) 电流源的电流是一个特定时间函数 $i_S(t)$，与其端电压的方向、大小无关；电流源的端电压由 $i_S(t)$ 和外电路共同确定。

(4) 受控源是一种电源，其输出电压或电流受电路中其他地方的电压或电流控制。受控源分为四种类型的受控源。电压控制电压源，简称 VCVS；电压控制电流源，简称 VCCS；电流控制电压源，简称 CCVS；电流控制电流源，简称 CCCS。

4. 电路的基本定律主要是：基尔霍夫定律和欧姆定律

(1) 基尔霍夫电流定律(KCL)为：在集总参数电路中，任一时刻，任一节点上，流出任一节点或封闭面的全部支路电流的代数和等于零。

$$\sum_{k=1}^{n} i_k = 0$$

(2) 基尔霍夫电压定律(KVL)陈述为：在任一时刻、沿任一回路绕行一周，各支路(元件)的电压降的代数和为零。

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = 0$$

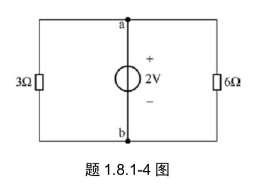
(3) 任何集总参数电路的电压电流都要受 KCL、KVL 和 VCR 方程的约束。直接反映这些约束关系的方程是最基本的电路方程，它们是分析电路的基本依据。

1.8 习 题

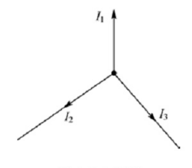
1.8.1 填空题

1. 在电路模型中白炽灯泡常用__________元件表示。
2. 电路中电压、电流值的正、负与假定的参考方向(正方向)__________。
3. 任意两点之间的电位差都与零参考点的位置__________。
4. 题 1.8.1-4 图所示电路中电压源提供的功率__________。
5. 理想电压源的内阻等于__________；理想电流源的内阻等于__________。

6. 如果电阻元件上电压 U、电流 I 的为非关联参考方向，则欧姆定律可表示为____________。
7. 电路分析中常用的基本定律是____________和____________。
8. 题 1.8.1-8 图所示电路中 $I_1 = 2\text{A}$， $I_2 = -5\text{A}$ 则 $I_3 =$____________。

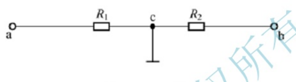


题 1.8.1-4 图



题 1.8.1-8 图

9. 题 1.8.1-9 图所示电路，已知 $V_a = 40\text{V}$, $V_b = -10\text{V}$, 则 $U_{ba} =$ ____________。

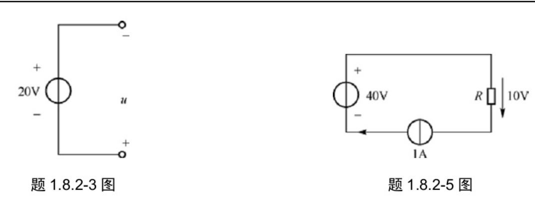


题 1.8.1-9 图

10. 基尔霍夫电流定律(KCL)可表述为：电路任一节点，在任一时刻流入该节点的_________为零。基尔霍夫电压定律(KVL)可表述为：电路中任一回路，在任一时刻，沿回路的_________为零。

1.8.2　选择题

1. 有一个 100Ω， 1W 的碳膜电阻使用于直流电路，使用时电流不能超过(　　)。
   A. 10mA　　B. 100mA　　C. 1mA　　D. 0.01mA
2. 在由理想电压源直接供电的负载 A 两端并联负载 B，则负载 A 上的电压(　　)。
   A. 变大　　B. 变小　　C. 不变　　D. 不确定
3. 电路如题 1.8.2-3 图所示，电压 $u =$ (　　)。
   A. −20V　　B. 20V　　C. 0V　　D. 不确定
4. 电路中任一点的电位大小与(　　)有关。
   A. 电源电压　　B. 回路　　C. 支路数　　D. 参考点
5. 电路如题 1.8.2-5 图所示，电路中输出功率的元件是(　　)。
   A. 仅是电压源　　B. 仅是电流源
   C. 电压源和电流源都产生功率　　D. 没有



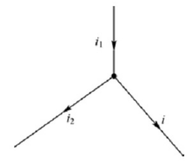
题 1.8.2-3 图　　　　题 1.8.2-5 图

6. 两个并联电阻的功率相同，它们的电阻值(　　)。

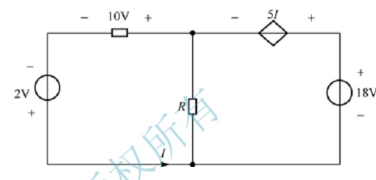
A. 不同　　B. 相同　　C. 不确定



7. 基尔霍夫电流定律(KCL)是说明(　　)之间关系的定律。
   A. 电路中所在支路电流　　B. 同一回路中各支路电流
   C. 接于同一节点的各支路电流　　D. 同一网孔中各支路电流
8. 基尔霍夫电压定律(KVL)是说明(　　)之间关系的定律。
   A. 电路中所在元件端电压　　B. 闭合回路中各元件电压
   C. 接于同一节点的元件电压
9. 题 1.8.2-9 图所示电路中 $i_1 = \mathrm{e}^{-2t}$A, $i_2 = \cos t$A 则 i =(　　)。
   A. e^{-2t}　　B. $\cos t$A　　C. $\mathrm{e}^{-2t} + \cos t$A　　D. $\mathrm{e}^{-2t} - \cos t$A
10. 题 1.8.2-10 图所示电路中，受控源的类型是(　　)，受控源两端的电压是(　　)。



题 1.8.2-9 图

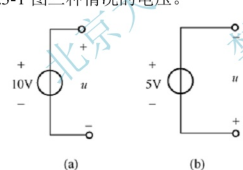


题 1.8.2-10 图

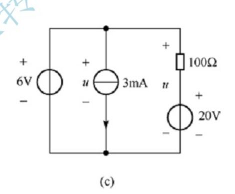
   A. CCCS，10V　　B. CCVS，不确定
   C. CCVS，10V　　D. CCVS，30V

1.8.3　计算题

1. 求题 1.8.3-1 图三种情况的电压。



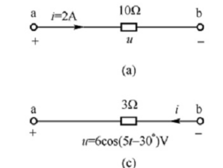
(a)　　(b)

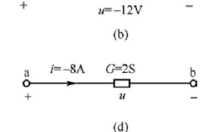


(c)

题 1.8.3-1 图

2. 求题 1.8.3-2 图所示电路中的 u 或 R 或 i。

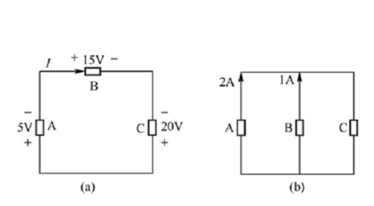




(a)　(b)　(c)　(d)

题 1.8.3-2 图

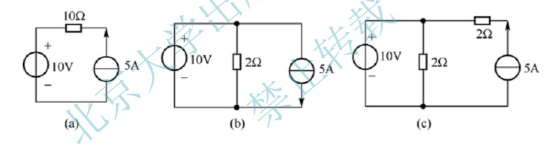
3. 题 1.8.3-3(a)图所示电路中，已知元件 C 提供的功率是 20W，问：电路电流 I 、元件 A、B 的功率是多少？判断它们是吸收还是提供功率。图 1.8.3-3(b)已知元件 A 提供的功率是 36W，问：元件 B、C 的功率是多少？判断它们是吸收还是提供功率。
4. 某个支路电压与电流为关联参考方向，波形图如题 1.8.3-4 图所示。分别画出其功率和能量的波形。



题 1.8.3-3 图

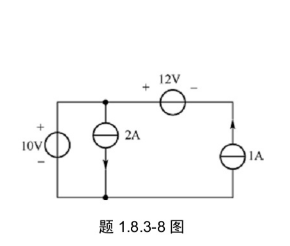
题 1.8.3-4 图

5. 某车间有 12 只“ 220V 、 60W ”的照明灯和 20 把“ 220V 、 45W ”的电烙铁，平均每天使用 8h，问每月(按 30 天计算)该车间用电多少 kW • h？
6. 4.5A • h(安 • 小时)，1.5V 手电筒电池提供电流为 100mA，该电池能维持多久？
7. 计算题 1.8.3-7 图中各元件上的电流、电压和功率，并校核功率平衡关系。

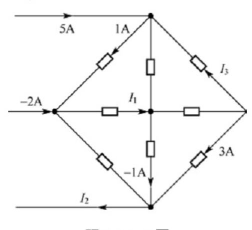


题 1.8.3-7 图

8. 电路如题 1.8.3-8 图所示，计算各电源功率，并说明是提供功率还是吸收功率。
9. 电路如题 1.8.3-9 图所示，求电流 I_1， I_2，能求得 I_3 的值吗？

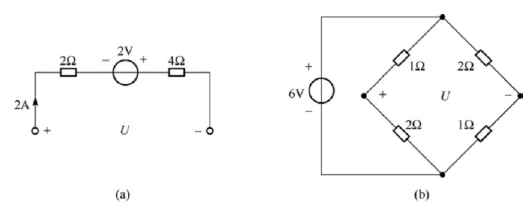


题 1.8.3-8 图



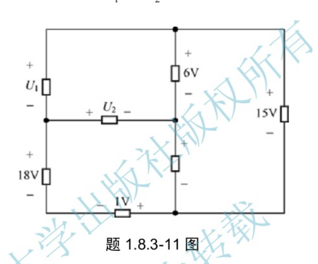
题 1.8.3-9 图

10. 求题 1.8.3-10 图所示电路的电压U。



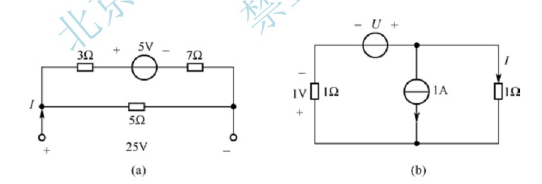
题 1.8.3-10 图

11. 电路如题 1.8.3-11 图所示，求电压U_1，U_2。



题 1.8.3-11 图

12. 求题 1.8.3-12 图所示电路的电流I。

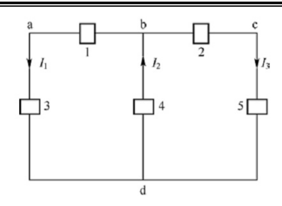


题 1.8.3-12 图

13. 电路如题 1.8.3-13 图所示，各方框泛指元件，已知$I_1 = 3A$，$I_3 = -2A$，$V_a = 10V$，$V_b = 8V$，$V_d = -3V$：

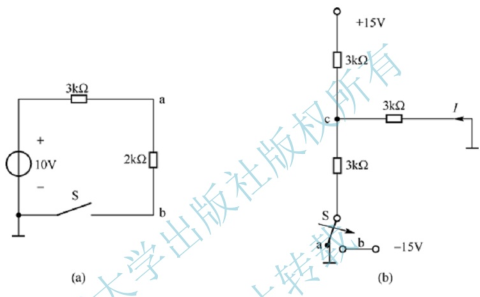
(1) 欲验证I_1, I_3数值是否正确，问电流表在图中应如何连接？并标明电流表极性。

(2) 求U_{ab}, U_{da}，若要测量这两个电压，问电压表如何连接？并标明电压表极性。



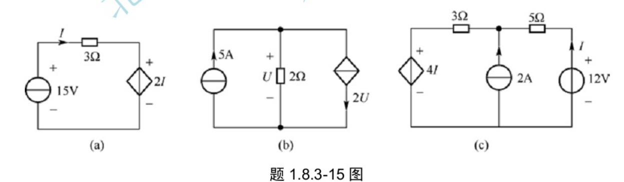
题 1.8.3-13 图

14. 题 1.8.3-14 图所示直流电路，计算图(a)开关 S 打开和闭合时的 V_a，V_b，U_{ab}。图(b)开关 S 分别接到 a,b 点时，电位 V_c, I 各为多少？



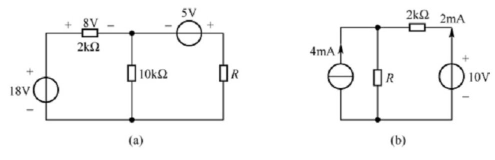
题 1.8.3-14 图

15. 求题 1.8.3-15 图电路图(a)、(c)中的电流 I，图(b)中的电压 U。



题 1.8.3-15 图

16. 电路如题 1.8.3-16 图所示，求未知电阻 R。



题 1.8.3-16 图

第 2 章　二端网络的等效

教学提示：等效变换是分析线性电阻电路的一种重要的方法，其中心思想就是将电路中的某一部分用其简单的等效电路来替代，如电路 N_1 和电路 N_2 有完全相同的伏安特性，则称电路 N_1 和电路 N_2 互为等效电路，利用等效变换可以简化电路的分析与计算。

教学要求：本章主要讨论电路等效的概念及各种电路的等效化简方法，重点是电阻的串、并联化简及性质；独立电源、受控源的串并联及简化等效电路。

2.1　二端电路等效的概念

二端网络(单口网络)的概念在电路分析中经常用到，本节介绍二端网络概念后将讨论二端网络的等效定义、等效的条件、等效的目的。

2.1.1　二端电路

由线性电阻、线性受控源和独立电源组成的电路称为线性电阻电路，简称电阻电路。具有两个端子的电阻电路称为二端网络电路或含源单口网络(one-port network)，常用符号 N 表示，如图 2.1 所示。

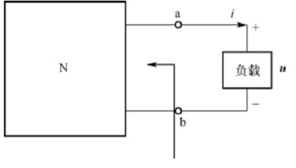


图 2.1　含源单口网络

分析线性电阻电路的方法很多，基本依据都是基尔霍夫的两个定律及元件的伏安关系。等效变换是分析线性电阻电路的一个重要的方法，其中心思想就是将电路中的某一复杂部分用其简单的等效电路来替代。

2.1.2　电路等效的概念

如果电路 N_1 和电路 N_2 具有完全相同的端口伏安关系，则称 N_1 和 N_2 互为等效电路(equivalent circuit)。电路 N_1 和 N_2 的内部结构和元件参数可以完全不同，但对端口以外的电路而言，不论接入的是电路 N_1 还是 N_2，外电路的电压、电流不会改变，即对外电路是等效的。

如图 2.2 所示。互为等效的两部分电路 N_1 与 N_2 在电路中可以相互替换，也就是说利用图 2.2(a)求出 F 中的电流、电压、功率与利用图 2.2(b)求出 F 中的电流、电压、功率是

一样的。常将图 2.2(a)与图 2.2(b)称为互为等效电路。

电路等效变换的条件是相互代换的两部分电路具有相同 VCR；电路等效的对象是 F(也就是电路未变化的部分)中的电流、电压、功率；电路等效变换的目的是为了简化电路，可以方便地求出需要求得的结果。

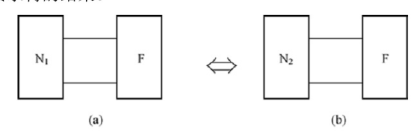


图 2.2　电路等效示意图

思考与练习

2.1-1　何谓电路等效？两电路等效需满足什么条件？

2.1-2　电路中某一部分被等效变换后，未被等效部分的________与________仍然保持不变。即电路的等效变换实质是________等效。

2.2　电阻的串、并、混联及等效电阻

在电路中，电阻元件不止一个，根据不同需要按一定方式连接，首先分析简单的电阻的串联、并联、混联电路，然后分析电阻的星形连接与三角形连接的等效变换，求出等效电阻后可以使电路计算简单化。

2.2.1　电阻的串联

1. 串联等效电阻

图 2.3(a)所示由两个电阻串联(series connection)组成的电路，特点是电路没有分支，通过两个电阻的电流相同。用 u 和 i 分别表示电路的端口电压、电路电流。

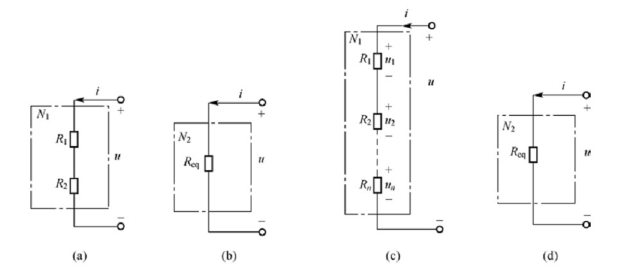
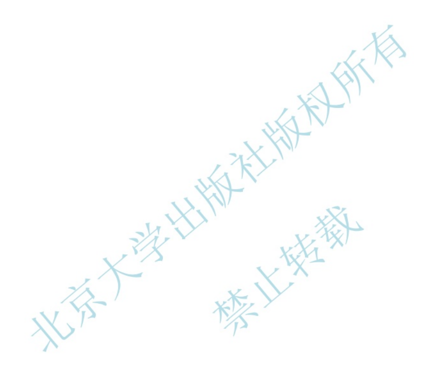


图 2.3　电阻的串联



根据 KVL 和欧姆定律有：

$$u = u_1 + u_2 = R_1 i + R_2 i = (R_1 + R_2) i$$

$$\frac{u}{i} = R_{eq} = R_1 + R_2 = \sum_{k=1}^{n} R_k \quad (k = 1,\ 2) \tag{2.1}$$

式中，R_{eq} 称为串联电阻的等效电阻如图 2.3(b)所示，从式(2.1)中可以看出：电阻串联，其等效电阻等于相串联各电阻之和。这个结论对多个电阻串联如 n 个电阻串联也成立，如图 2.3(c)所示，等效电路如图 2.3(d)所示。

$$R_{eq} = \frac{u}{i} = R_1 + R_2 + \cdots R_k + \cdots R_n = \sum_{k=1}^{n} R_k \quad (k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{2.2}$$

2. 串联电阻的分压公式

电阻串联时，各串联电阻的电压为

$$\boxed{u_k = R_k i = R_k \frac{u}{R_{eq}} = \frac{R_k}{R_{eq}} u} \qquad (k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{2.3}$$

表明各个串联电阻上的电压与其电阻值成正比，即电阻值越大分得的电压越大。式(2.3)为分压公式。利用式(2.3)时，需注意各电压的参考方向。

3. 串联电路的功率关系

串联电阻电路的功率

$$p = ui = (R_1 + R_2 + \cdots + R_n) i \cdot i = R_1 i^2 + R_2 i^2 + \cdots + R_n i^2 = \sum_{k=1}^{n} R_k i^2 = R_{eq} i^2 \tag{2.4}$$

式(2.4)表明，多个串联电阻吸收的功率是各个电阻吸收的功率之和，即等于等效电阻吸收的功率。

2.2.2 电阻的并联

1. 并联等效电阻

图 2.4(a)是两个电阻并联(parallel connection)的电路，其特点是：电阻 R_1和R_2 的两端电压相等。利用 KCL 和欧姆定律可以求得总电流 i 和各电阻的电流的关系

$$i = i_1 + i_2 = \frac{u}{R_1} + \frac{u}{R_2} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) u$$

因为 $G_1 = \frac{1}{R_1}$，$G_2 = \frac{1}{R_2}$，所以有

$$\frac{i}{u} = G_{eq} = (G_1 + G_2) \tag{2.5a}$$

或

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \tag{2.5b}$$

由式(2.5b)推得两个电阻并联的等效电阻为

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{2.6}$$

G_{eq} 称为等效电导，图 2.4(a)可以等效为图 2.4(b)。

可以得出结论：电阻并联，其等效电导为各个电导之和，而等效电阻的倒数等于相并联的各电阻倒数之和。

式(2.5)适用于多个电阻并联的情况(如图 2.4(c)、(d)所示)。

$$G_{eq}=\frac{i}{u}=G_1+G_2+\cdots+G_k+\cdots G_n=\sum_{k=1}^{n}G_k \tag{2.7}$$

$$\frac{1}{R_{eq}}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\cdots+\frac{1}{R_k}+\cdots+\frac{1}{R_n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{R_k}$$

图 2.4　电阻的并联

2. 并联电阻的分流公式

电阻并联有分流关系，利用式(2.5a)可以推导出分流公式(2.8)，各并联电阻的电流 i_k 与端口电流 i 为分流关系。

$$i_k=\frac{u}{R_k}=G_k u=G_k\frac{i}{G_{eq}}=\frac{G_k}{G_{eq}}i \tag{2.8}$$

常见两个电阻并联的情况，将式(2.6)代入式(2.8)，两支路的电流分别为

$$\left.\begin{aligned} i_1&=\frac{u}{R_1}=\frac{R_{eq}i}{R_1}=\frac{R_2}{R_1+R_2}i\\ i_2&=\frac{u}{R_2}=\frac{R_{eq}i}{R_2}=\frac{R_1}{R_1+R_2}i \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

式(2.8)表明：由于并联电路电压相同，电阻值越大电导越小分得的电流越小，并联分流与电阻值成反比与电导值成正比。

3. 并联电路的功率关系

电阻并联电路消耗的总功率等于相并联各电阻消耗功率之和，且电阻大的消耗的功率小。以两个电阻并联为例

$$\left.\begin{aligned} p&=p_1+p_2\\ \frac{p_1}{p_2}&=\frac{i_1^2R_1}{i_2^2R_2}=\frac{R_2}{R_1} \end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

式(2.10)是将式(2.9)代入得到的。说明并联电阻的功率大小与电阻大小成反比。

2.2.3 电阻的混联

电路中既有电阻的串联又有电阻的并联称为混联电路(series-parallel connection)。实际电路中更常见的是混联电路，分析计算混联电路时，要仔细观察，认真判别电阻间的连接方式，对于短路导线连接的两点，可以缩成一点，节点最好标明符号，等电位的节点可以短路。经处理后，可以使电路简化。

下面通过例题来理解混联电路的分析方法。

[例 2.1] 在图 2.5 中，$R_1=10\Omega$，$R_2=20\Omega$，$R_3=20\Omega$，$R_4=40\Omega$，$U_S=90V$。

(1) S 打开时，求开关两端电压；(2) S 闭合时，求流经开关的电流。

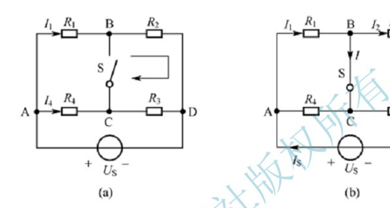


图 2.5　例 2.1 电路图

[解] (1) S 打开时，各支路电流如图 2.5(a)所示，则由假想回路 BDCB，利用 KVL 得

$$U_{BC}=I_1R_2-I_4R_3$$

$$I_1=\frac{U_S}{R_1+R_2}=\frac{90}{10+20}A=3A$$

$$I_4=\frac{U_S}{R_3+R_4}=\frac{90}{20+40}A=\frac{3}{2}A$$

$$U_{BC}=\left(3\times 20-\frac{3}{2}\times 20\right)V=30V$$

(2) 由图 2.5(b)开关 S 闭合后，电阻 R_1和R_4 并联，与 R_2和R_3 并联的电阻再串联。所以有

$$I_S=\frac{U_S}{R_1//R_4+R_2//R_3}=\frac{90}{18}=5A$$

$$I_1=\frac{R_4}{R_1+R_4}I_S=\left(\frac{40}{50}\times 5\right)A=4A$$

$$I_2=\frac{R_3}{R_2+R_3}I_S=\left(\frac{1}{2}\times 5\right)A=2.5A$$

利用 KCL 有：

$$I=I_1-I_2=1.5A$$

[例 2.2] 求如图 2.6(a)、(b)所示电路的等效电阻 R_{eq}。

[解] 解题分析：

(1) 首先将各节点标上符号或数字；

(2) 将短路线两端画在同一点上，即把短路线缩短或拉长，若有多个接地点，可用短路线相连；

(3) 再将元件画在各点之间，分析元件的连接关系。

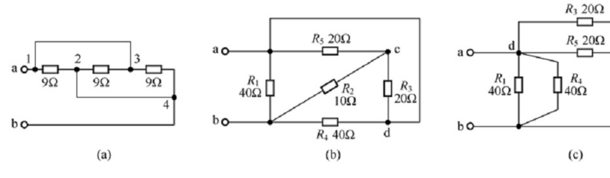


图 2.6　例 2.2 电路图

观察图 2.6(a)将 1、3 及 2、4 缩为一点，三个电阻均接在 a、b 之间，是并联连接，等效电导为

$$G_{eq} = G_1 + G_2 + G_3 = 3 \times \frac{1}{9}\text{S} = \frac{1}{3}\text{S}$$

等效电阻为

$$R_{eq} = \frac{1}{G_{eq}} = 3\Omega$$

观察图 2.6(b)将 a 点和 d 点短路线缩为一点。可以得到图 2.6(c)，等效电阻为

$$R_{ab} = (R_3 // R_5 + R_2) // (R_1 // R_4)$$

$$= \left(\frac{20}{2} + 10\right) // \frac{40}{2}\Omega = \frac{20 \times 20}{20 + 20}\Omega = 10\Omega$$

2.2.4　电阻 Y-△连接电路的等效变换

在如图 2.7 所示不平衡桥式电路中，电阻间不能利用串、并联进行等效化简。这时就需要进行电阻△-Y 连接电路等效变换，简化电路。

1. 电阻的△连接

将图 2.7 电路 1 节点拽紧，三个电阻 R_{12}、R_{13}、R_{23}，它们的两个端子分别首尾相连，形成电路像△形，这种连接方式称为电阻的△连接，如图 2.8(a)所示。

2. 电阻的 Y 连接

三个电阻 R_1、R_2、R_3 各有两个端子，将每个电阻的一个端子连接在一起，构成一个共同的节点，另外三个端子作为引出端与外电路相连，如图 2.8(b)所示，这种连接方式称为电阻的 Y 连接或星形连接。

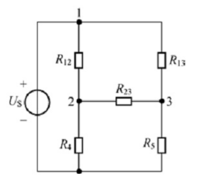
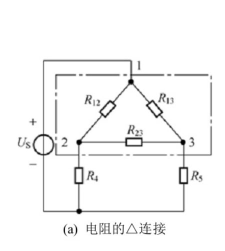
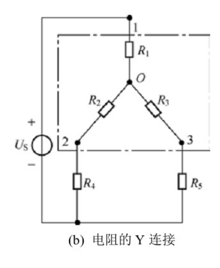


图 2.7　不平衡电桥电路



(a) 电阻的△连接



(b) 电阻的 Y 连接

图 2.8　电阻的△连接和 Y 连接

3. 电阻△形连接电路等效变换为 Y 形电路

所谓△形电路等效变换为 Y 形电路，就是已知△形电路中三个电阻 R_{12}、R_{13}、R_{23}，通过变换公式求出 Y 形电路中的三个电阻 R_1、R_2、R_3，来替换△形电路中的三个电阻，电路改接成 Y 形，这就完成了△形等效变换为 Y 形的任务。

△形电路等效变换为 Y 形电路，其等效变换条件或公式为

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= \frac{R_{12}R_{13}}{R_{12}+R_{23}+R_{13}} \\ R_2 &= \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{13}} \\ R_3 &= \frac{R_{13}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{13}} \end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

观察图 2.8(a)、(b)由△形变换为 Y 形电路时三个电阻连接与记忆技巧：

在△形电路中心点一个 O 点，O 点分别与 1，2，3 个端点连接电阻 R_1、R_2、R_3，R_1 的阻值等于△形电路中与端 1 相连的两个电阻 R_{12} 与 R_{13} 之积除以△形连接的三个电阻 R_{12}、R_{13} 和 R_{23} 之和；R_2 的阻值等于△形电路中与端 2 相连的两个电阻 R_{12} 和 R_{23} 之积除以△形连接的三个电阻 R_{12}、R_{13} 与 R_{23} 之和；同理，可以求得式(2.11)R_3 的阻值。

如果△形连接的三个电阻 R_{12}、R_{13} 与 R_{23} 相等，即 $R_{12}=R_{23}=R_{13}=R_{\Delta}$，则等效 Y 形连接中的三个电阻也相等，它们等于

$$R_1=R_2=R_3=\frac{1}{3}R_{\Delta} \tag{2.12}$$

4. Y 电阻连接电路等效变换为△形电路

Y 形电路等效变换为△形电路，就是已知 Y 形电路中三个电阻 R_1、R_2、R_3,，通过变换公式求出△形电路中的三个电阻 R_{12}、R_{13}、R_{23}，也就是由图 2.8(b)电路变换为图 2.8(a)电路图。

Y 形电路等效变换为△形电路，其等效变换条件或公式为

$$\left.\begin{aligned} R_{12} &= \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}{R_3} = R_1 + R_2 + \frac{R_1R_2}{R_3} \\ R_{23} &= \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}{R_1} = R_2 + R_3 + \frac{R_2R_3}{R_1} \\ R_{13} &= \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}{R_2} = R_1 + R_3 + \frac{R_1R_3}{R_2} \end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

由 Y 形变换为△形电路时三个电阻连接与记忆技巧：

将 Y 形电路中的三个端点 1，2，3 互相用电阻连接，即 1、2 端连上电阻 R_{12}，2、3 两端连上电阻 R_{23}，1、3 两端连上电阻 R_{13}。电阻 R_{12} 等于 R_1 与 R_2 之和加上 R_1 与 R_2 之积除以 Y 形连接剩余的第三者 R_3；同理可以求得 R_{23} 和 R_{13}。

如果 Y 形电路中三个电阻 R_1、R_2、R_3 相等，则等效△形连接的三个电阻也相等：

$$R_{12} = R_{23} = R_{13} = 3R_Y \tag{2.14}$$

[例 2.3] 如图 2.9(a)所示电路为桥式电路，求电流 i_2 和 1，4 两端子之间的等效电阻。

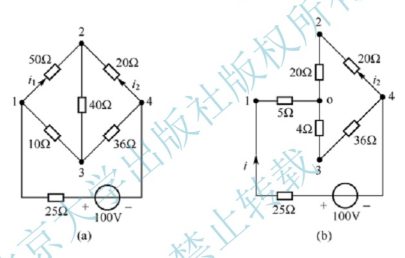


图 2.9　例 2.3 电路图

[解] 端子 1、2、3 之间的三个电阻为△形连接，把它等效变换为 Y 形连接，如图 2.9(b)所示，图中等效 Y 形连接的电阻利用式(2.11)计算：

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{13}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}} = \frac{10 \times 50}{50 + 10 + 40}\Omega = 5\Omega$$

$$R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}} = \frac{40 \times 50}{50 + 10 + 40}\Omega = 20\Omega$$

$$R_3 = \frac{R_{13}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}} = \frac{10 \times 40}{50 + 10 + 40}\Omega = 4\Omega$$

于是

$$R_{14} = [5 + (20 + 20) // (4 + 36)]\Omega = 25\Omega$$

总电阻为

$$R = 25\Omega + 25\Omega = 50\Omega$$

电流

$$i = \frac{100}{50}\text{A} = 2\text{A}$$

利用分流公式，电流

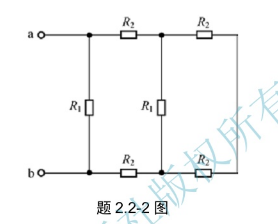
$$i_2 = -\frac{4+36}{4+36+20+20} \times i = -1\text{A}$$

注意 i_2 的方向。

思考与练习

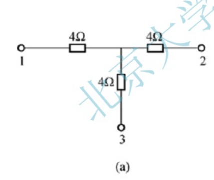
2.2-1　电阻并联电路中，阻值较大的电阻上分流较________，功率较________。

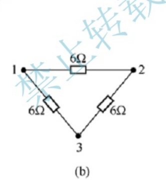
2.2-2　题 2.2-2 图所示电路中，已知 $R_1 = 10\Omega$， $R_2 = 5\Omega$，求 a 、 b 两端的等效电阻 R 。

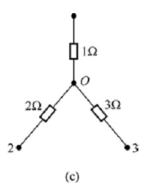


题 2.2-2 图

2.2-3　题 2.2-3 图所示电路中，画出图(a)、(c)的△形等效电路，画出图(b)的 Y 形等效电路，并求各图的等效电阻。

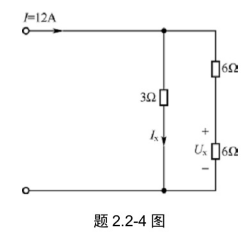






题 2.2-3 图

2.2-4　求题 2.2-4 图电路图中的 I_x 和 U_x 。(9.6A，14.4V)



题 2.2-4 图

2.3　电压源、电流源电路的等效变换

本节先介绍理想电压源、电流源的串、并联的等效电路，然后重点讨论实际电源的两种模型及其等效变换的问题。

2.3.1　电压源的串、并联及等效电路

1. 电压源的串联及等效电路

如图 2.10(a)所示电路是由 n 个独立电压源串联组成，根据 KVL 有

$$u_{\text{seq}} = u_{s1} + u_{s2} - u_{s3} + \cdots + u_{sn} = \sum_{k=1}^{n} u_{sk} \tag{2.15}$$

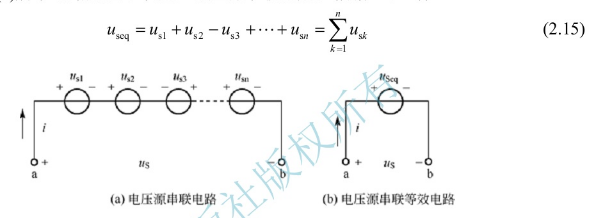


图 2.10　独立电压源串联电路

图 2.10(b)所示的等效电路为一个理想电压源，其电压是这 n 个电压源电压的代数和，其中电压源参考方向与等效电压源 u 参考方向一致的 u_{sk} 取正值，相反则取负值。

例如图 2.11(a)所示四个电压源串联，注意各电压源的参考方向，其等效电压源电压为

$$u = -5\text{V} + 12\text{V} - 8\text{V} + 6\text{V} = 5\text{V}$$

其等效电路图如图 2.11(b)所示。

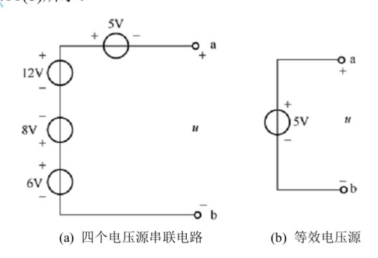


图 2.11　四个电压源串联电路及其等效电压源

2. 电压源的并联

只有电压相等且极性相同的电压源才能并联，如图 2.12 所示。否则，不满足 KVL。或称该电路中的元件“模型失效”。

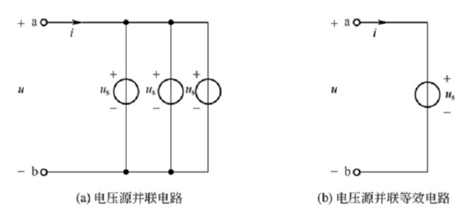


图 2.12　电压源并联电路及其电压源并联等效电路

3. 电压源与其他支路并联

当电压源 u_S 与电流源或任一元件并联后外接电阻如图 2.13(a)、图 2.13(b)所示，对外接的电阻 R_L 而言， R_L 承受的电压都是 u_S，电流也没变化。因此，电压源 u_S 并联任意支路对外电路来讲可用一个等效电压源替代，等效电压源的电压仍为 u_S。图 2.13(a)、图 2.13(b)对外电路的等效电路如图 2.13(c)所示。

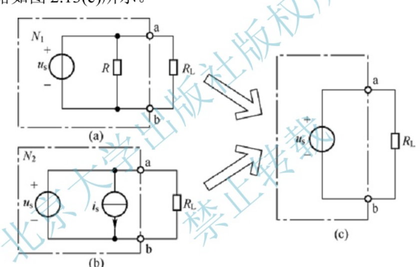


图 2.13　电压源与支路并联

2.3.2　电流源的并、串联及等效电路

1. 电流源的并联及等效电路

如图 2.14(a)所示电路为 n 个独立电流源并联组成，根据 KCL 有式(2.16)

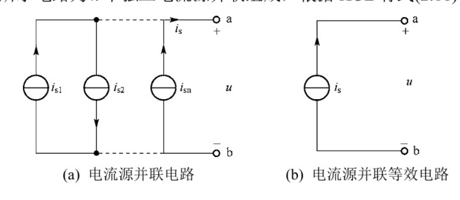


图 2.14　电流源的并联及等效电路

$$i_S = i_{S1} - i_{S2} + \cdots + i_{Sn} = \sum_{k=1}^{n} i_{Sk} \tag{2.16}$$

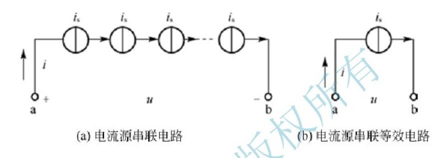
因此 n 个独立电流源并联电路可以等效为一个电流源，该电流源的电流 i_S 为这 n 个并联电流源电流的代数和，其中电流源参考方向与等效电流源 i_S 参考方向一致的 i_{Sk} 取正值，相反则取负值。

例如图 2.14(a)中 $i_{S1} = -2A$，$i_{S2} = 5A$，$i_{S3} = 10A$，那么，等效电流为

$$i_S = i_{S1} - i_{S2} + i_{S3} = (-2)A - 5A + 10A = 3A$$

2. 电流源的串联及等效电路

只有电流相等且参考方向相同的电流源才能串联，如图 2.15 所示。否则，不满足 KCL。



(a) 电流源串联电路　　(b) 电流源串联等效电路

图 2.15　电流源的串联及等效电路

3. 电流源与电压源或其他支路串联

当电流源 i_S 与电压源或任一元件串联且外接电阻 R_L 时如图 2.16(a)，(b)所示，外接的电阻 R_L 所流过的电流都是 i_S，其上的电压也没变化。因此，电流源 i_S 串联任意支路对外电路来讲就是一个等效电流源 i_S。图 2.16(a)、图 2.16(b)分别是电流源与电阻串联、电流源与电压源串联电路，它们对外电路的等效电路如图 2.16(c)所示。注意图 2.16(c)等效变换是针对外电路，对电源部分是不等效的。

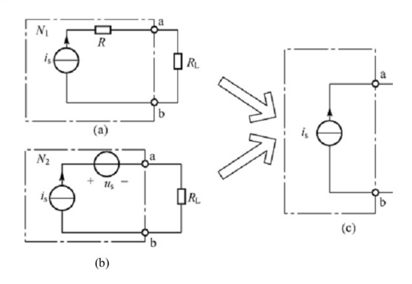


图 2.16　电流源与支路串联

[例 2.4] 化简图 2.17 电路。

[解] 应用电压源与其他支路并联等效为电压源，电流源与其他支路串联为等效电流源，按

图示化简，最后得到图 2.17(d)最简等效电路。

图 2.17　例 2.4 电路图

2.3.3　两种实际电源模型的等效变换

1. 两种实际电源模型

直流理想电压源(ideal voltage source)的输出为一条平行于电流的直线(如图 2.18(b)中的虚线)，表明电压源具有恒压的特性。但在实际工作中对实际电源进行测试，得到的输出伏安特性如图 2.18(b)所示，随着电流的增大，电压 u 是减小的，说明实际上电压源产生能量的同时还消耗能量，因此可以抽象得到实际电压源的电路模型为电压源与电阻的串联，称为实际电压源的模型，如图 2.18(c)所示，其中 R_S 通常称为内阻。可以得到

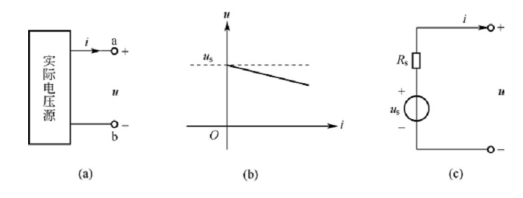


图 2.18　实际电压源的伏安特性与电路模型



$$u = u_S - iR_S \tag{2.17}$$

工程实际中的电压源一旦出现短路，电源发热量将会急剧上升，造成电源的绝缘材料烧毁，电源损坏。要倍加小心。

实际工作中电流源产生电能的同时还消耗电能，因此实际电流源可以抽象成一个理想电流源(ideal current source)与电阻并联的电路模型，如图 2.19(c)所示，R_S 称为内阻。

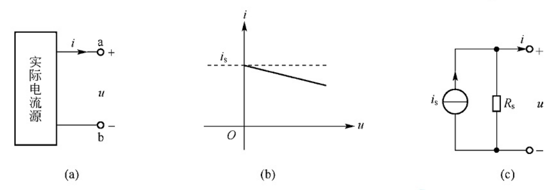


图 2.19　实际电流源的伏安特性与电路模型

由图 2.19(c)利用 KCL 得

$$i = i_S - \frac{u}{R_S} \tag{2.18}$$

2. 两种实际电源的等效变换

已知电压源模型，求出等效的电流源模型，即将图 2.20(a)、图 2.20(b)两种电源进行等效变换。

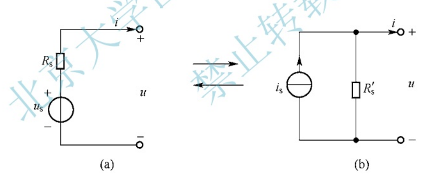


图 2.20　两种电源模型的等效变换

实际电压源端口的伏安关系为式(2.17)，将式子两边同除 R_S，整理得

$$\frac{u}{R_S} = \frac{u_S}{R_S} - i \qquad i = \frac{u_S}{R_S} - \frac{u}{R_S}$$

利用等效条件：保持端口伏安关系相同。将上式与电流源的伏安关系式(2.18)比较，则

$$\boxed{i_S = \frac{u_S}{R_S} \qquad R_S' = R_S} \tag{2.19}$$

所以当由电压源模型图 2.20(a)，等效变换为图 2.20(b)电流源模型时，电流源的电流为 $i_S = \frac{u_S}{R_S}$，电阻 R_S' 仍为 R_S 不变。注意电流源 i_S 的方向是由电压源的正极流出。

同理可推出：当由电流源模型图 2.20(b)等效变换为图 2.20(a)电压源模型时，电压源的电压为 $u_S = R_S' i_S$，电阻不变。注意：电压源的正极为图 2.20(b)电流源的电流流出一端。

图 2.20 两种电源模型的等效变换称为电源的等效变换法，利用它可以化简电路。

这里的等效变换是指对外电路等效，理想电压源与理想电流源是不能等效互换的。

[例 2.5] 利用电源的等效变换法求图 2.21(a)中的 3Ω 电流 I。

[解] 图 2.21(a)中，8V 电压源与电阻 6Ω 并联等效为 8V 电压源后，8V 电压源与 2Ω 串联等效为电流源与电阻并联，等效电路为图 2.21(b)，不断进行电源等效变换，变换时注意电流源的流向和电压源的正负极。最后可得到图 2.21(d)所示等效电路。

利用图 2.21(d)求得
$$I = \frac{1-6}{1+1+3}\text{A} = -1\text{A}$$

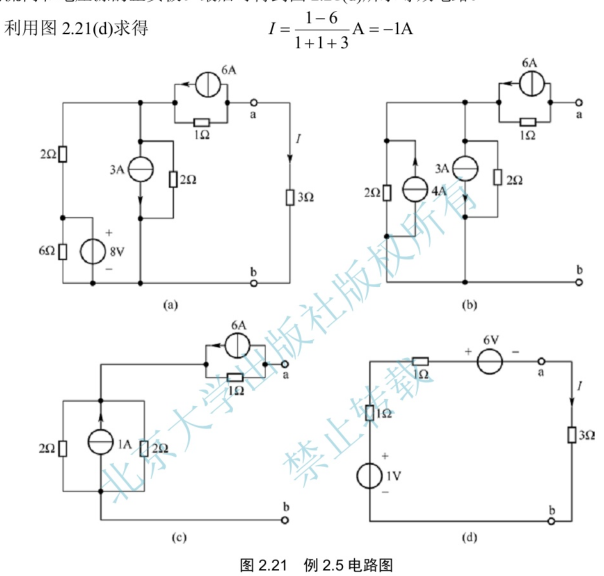


图 2.21　例 2.5 电路图

思考与练习

2.3-1　判断下列题目的正误。

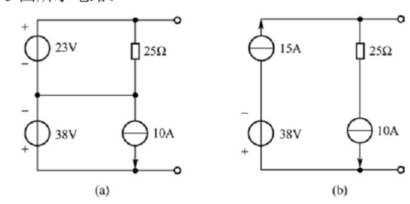
(1) 一个理想电压源与电阻的串联电路可以等效变换为一个电流源与电阻的并联电路。　(　　)

(2) 一个理想电压源与电阻的串联电路可以等效变换为一个电流源与电阻的串联电路。　(　　)

(3) 一个理想电流源与电阻的并联电路可以等效变换为一个电压源与电阻的串联电路。　(　　)

2.3-2　某实际电源，当外电路开路时两端电压为 10V，当外电路接 $R = 5\Omega$ 电阻时两端电压为 5 V。试画出该实际电源的电压源模型与电流源模型。

2.3-3　化简题 2.3-3 图所示电路。



题 2.3-3 图

2.4　含受控源电路的等效变换

受控源与独立电源的不同之处在于它的电压(电流)受电路中某支路电压或电流的控制，对含有受控源的二端网络的等效变换与独立源等效变换基本相同，在等效变换时受控源可先当做独立源进行变换，不过在变换时一般应保持控制量所在支路不变。

[例 2.6] 求图 2.22(a)所示电路的等效电阻。

[解] 分析 2.22(a)的电路图，图中二端网络除了电阻外还有受控源，但无独立源，要求出端口处的等效电阻，**就要利用式 $R_{eq}=u/i$，即通过端口处的电压除以端口的电流来求出 R_{eq}，一般也将这个等效电阻称为输入电阻 R_{in}**。可以用外加电压法计算，即在端口处加一电压源激励，求出流入端口的响应电流，它们的比值即为端口的输入电阻。

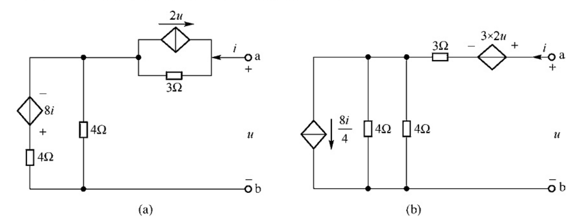
将图 2.22(a)的电压控制的电流源 $2u$ (与 3Ω 并联)、电流控制的电压源 $8i$ (与 4Ω 串联)，利用电源等效变换法分别化简为受控电压源 $3\times2u$ 与 3Ω 电阻串联、受控电流源 $8i/4$ 与 4Ω 电阻并联如图 2.22(b)所示，此时它们相应的控制量不变，再利用电流源与电阻并联化简为受控电压源 $2\times2i$ 与电阻串联，如图 2.22(c)所示。

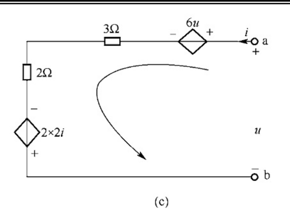
对图 2.22(c)利用 KVL 列方程

$$6u+(3+2)i=4i+u \qquad 5u=4i-5i=-i$$

$$R_{eq}=\frac{u}{i}=-\frac{1}{5}\Omega$$

含有受控源的电路的等效电阻有可能出现负电阻。

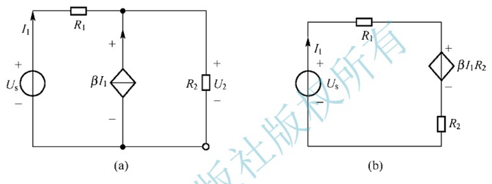




(c)

图 2.22　例 2.6 电路图

[例 2.7] 如图 2.23(a)所示电路中 $U_S = 22V, R_1 = 1\Omega, R_2 = 4\Omega, \beta = 1.5$，求图 2.23(a)中的电流 I_1 及受控源的功率。



(a)　　(b)

图 2.23　例 2.7 电路图

[解] 将受控电流源 βI_1 和电阻 R_2 的并联电路等效变换为受控电压源与电阻的串联电路，如图 2.23(b)所示，根据 KVL，可得

$$U_S = R_1 I_1 + \beta I_1 R_2 + I_1 R_2$$
$$1 \times I_1 + 1.5 \times 4I_1 + 4I_1 = 22$$
$$I_1 = 2A$$

在图 2.23(a)中求受控电流源两端的电压

$$U_2 = U_S - I_1 R_1 = 22V - 2 \times 1V = 20V$$

受控源的电压与电流为非关联参考方向，所以受控电流源的功率为

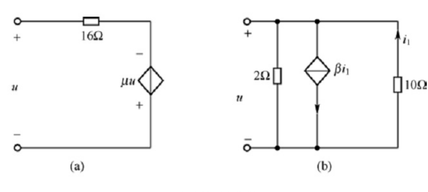
$$P = -UI = -U_2 \times (\beta I_1) = -20 \times 1.5 \times 2W = -60W \text{ (提供功率)}$$

注意：在变换过程中，受控源控制支路始终不能变动，否则受控源的控制量就不存在了。

思考与练习

2.4-1　受控电流源与电阻并联和受控电压源与电阻串联电路等效变换时，控制系数将如何变换？

2.4-2　求题 2.4-2 图所示二端电路的输入电阻，其中图(a)中 $\mu = 3$，图(b)中 $\beta = 8$。(4Ω，-5Ω)



题 2.4-2 图

2.5　实际应用举例

电阻的分压性质常应用于电表的量程扩大，如图 2.24 所示电路。

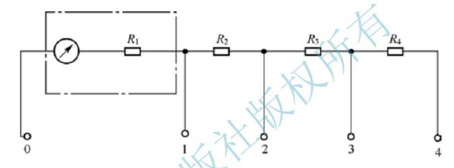


图 2.24　扩大电压表量程的电路图

下面的任务是将一个满刻度偏转电流为0.5mA，内阻为 R_1=1 kΩ的表头，设计成一个能测量 5V， 50V 及 500V 的电压表。

由于表头内阻一定，当表头两端接上被测电压 U 时，流过表头两端的电流随 U 变化而变化，且与其成正比。若指针的偏转角度与电流成正比，也和电压成正比。因此在表盘上刻上电压刻度，就可以测量电压了。

图 2.24 中，已知表头的内阻为 R_1=1 kΩ，而最大偏转电流为0.5mA，当开关在“1”挡时(“2”、“3”、“4”端钮断开)

$$U_{10} = R_1 I = 1\times 0.5\text{V} = 0.5\text{V}$$

所以这个表头所能测量的最大电压为0.5V。若被测电压超过0.5V，则表头会被烧毁。可以采用表头串联电阻的方法，利用串联电阻分压原理，使多出的电压降在串联电阻上，使得表头压降不超过0.5V。当开关在“2”挡时对应5V 电压量程(“1”、“3”、“4”端钮断开)

$$U_{20} = (R_1 + R_2)I = (1 + R_2)\times 0.5 = 5\text{V}，\quad R_2 = 9\text{k}\Omega$$

当开关在“3”挡时对应50V 电压量程(“1”、“2”、“4”端钮断开)

$$U_{30} = (R_1 + R_2 + R_3)I = (1 + 9 + R_3)\times 0.5 = 50\text{V}，\quad R_3 = 90\text{k}\Omega$$

当用“0”、“4”端测量时，电压表的总电阻为 $R = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$，若这时所测的电压恰好为 500V(这时表头也达到满量程)，则通过表头电流仍为0.5mA

$$R = \frac{U_{40}}{I} = \frac{500}{0.5}\text{k}\Omega = 1000\text{k}\Omega$$

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = 1000\text{k}\Omega$$

则

$$R_4 = R - (R_1 + R_2 + R_3) = 1000\text{k}\Omega - 1\text{k}\Omega - 9\text{k}\Omega - 90\text{k}\Omega = 900\text{k}\Omega$$

由此可见，直接利用该表头测量电压，它只能测量 0.5V 以下的电压，而串联了分压电阻 $R_2 = 9\text{k}\Omega$，$R_3 = 90\text{k}\Omega$，$R_4 = 900\text{k}\Omega$ 以后，作为电压表，它就有 0.5V、5V、50V、500V 四个量程，实现了电压表的量程扩展。

同理，也可以利用并联电阻分流的原理，实现电流表的量程扩展。

2.6 小　结

1. 电路的等效变换定义

设有 N_1 和 N_2 两个单口网络，只要它们端口处的电压-电流完全相同，它们对连接到端口上的任一外部电路的作用效果相同，则 N_1 和 N_2 就是两个互为等效的单口网络。“等效”是对外部电路而言的，在电路的变换部分内部，变换前后不存在等效关系。

2. 电阻的等效变换

1) 电阻串联等效变换

当 n 个电阻串联时，等效电阻的计算公式为

$$R_{\text{eq}} = \sum_{k=1}^{n} R_k$$

在串联电路中，各电阻电压与端口电压之间满足

$$u_k = R_k i = \frac{R_k}{R_{\text{eq}}} u \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

2) 电阻并联等效变换

当 n 个电阻并联时，其等效电导的计算公式为

$$G = \sum_{k=1}^{n} G_k$$

在并联电路中，第 k 个电导中 G_k 的电流 i_k 计算公式

$$i_k = \frac{G_k}{G_{\text{eq}}} i \quad (k = 1,\ 2, \cdots, n)$$

3) 电阻串、并联电路

既有串联又有并联结构的电路称为串并联电路，也就是混联电路。

分析串、并联电路的关键是看清元件的串、并联关系，即通过同一电流的元件为串联，承受同一电压的元件为并联。

电路中含有短路线时，往往不易看清元件的连接关系。一般的做法是消去短路线，即将短路线缩短为点，使其连接的两个端点合并为一个点。

4) 电阻星形连接与三角形连接的等效变换

Y-△等效变换公式

△→Y时

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= \frac{R_{12}R_{13}}{R_{12}+R_{23}+R_{13}} \\ R_2 &= \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{13}} \\ R_3 &= \frac{R_{13}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{13}} \end{aligned}\right\}$$

Y→△时

$$\left.\begin{aligned} R_{12} &= \frac{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}{R_3} = R_1+R_2+\frac{R_1R_2}{R_3} \\ R_{23} &= \frac{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}{R_1} = R_2+R_3+\frac{R_2R_3}{R_1} \\ R_{13} &= \frac{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}{R_2} = R_1+R_3+\frac{R_1R_3}{R_2} \end{aligned}\right\}$$

3. 电源的等效变换

1) 理想电源的串、并联

当 n 个理想电压源串联时，可等效为一个理想电压源，其电压是这 n 个电压源电压的代数和。

n 个理想电流源并联电路可以等效为一个理想电流源，该电流源的电流 i_S 为这 n 个并联电流源电流的代数和。

2) 实际电源模型的等效变换

实际电压源的电路模型是一个理想电压源和一个电阻的串联，实际电流源的电路模型是一个理想电流源和一个电导(电阻)的并联。实际电源的两种模型的等效变换条件是

$$I_S = \frac{U_S}{R_S} \qquad R'_S = R_S$$

等效变换时注意等效的电流源的流向和电压源极性。

4. 受控源的等效变换

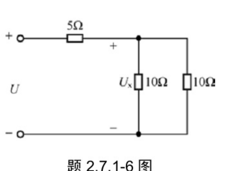
一个受控电压源和电阻串联的单口，可以与一个受控电流源和电阻并联的单口进行等效变换，变换的办法是将受控源当做是独立电源一样进行变换，但变换过程中一定要保证受控源的控制量在变换前后不变。

2.7 习　　题

2.7.1 填空题

1. 电压值不相等的电压源__________可以并联。
2. 电流相等的电流源__________串联。

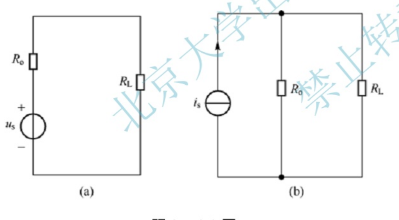
3. 电阻串联电路中，阻值较大的电阻上分压较__________，功率较__________。
4. 两个电阻并联后，总电阻值__________。
5. 当把电阻为 $R_{12}=R_{23}=R_{31}=R_{\triangle}$ 的三角形电路等效成星形电路时，其星形电阻为__________。
6. 电路如题 2.7.1-6 图，已知 $U=10\text{V}$，则 $U_x=$__________。
7. 电路如题 2.7.1-7 图所示，$I_R=$__________。



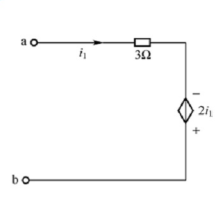
题 2.7.1-6 图

题 2.7.1-7 图

8. 理想电压源与理想电流源之间__________等效变换，而实际电压源与实际电流源之间则__________等效变换。
9. 由电源的等效变换可知，题 2.7.1-9 图(a)电路可用图(b)电路等效代替，图(a)、图(b)电路 R_o 消耗的功率__________；图(a)、(b)电路 R_L 消耗的功率__________。
10. 题 2.7.1-10 电路图中 ab 端的等效电阻为__________。



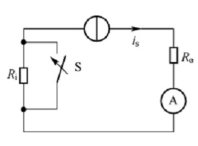
题 2.7.1-9 图

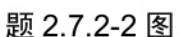


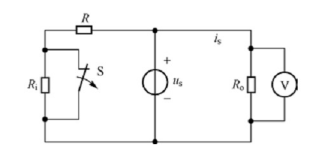
题 2.7.1-10 图

2.7.2　选择题

1. 设两个二端网络对外是等效的，则下列说法哪个是正确的？(　　)
   A. 它们的外特性相同　　B. 它们的内部特性相同
   C. 它们的内部结构相同　　D. 它们的内部电源相同
2. 题 2.7.2-2 图所示电路中，当开关 S 闭合后，电流表的读数将(　　)。
   A. 减少　　B. 增大　　C. 不变　　D. 不定
3. 题 2.7.2-3 图所示电路中，当开关 S 打开后，电压表的读数将(　　)。
   A. 减少　　B. 增大　　C. 不变　　D. 不定




题 2.7.2-2 图



题 2.7.2-3 图

4. 设 R_Y 为对称 Y 形电路中的一个电阻，则与其等效的△形电路中的每个电阻等于(　　)。

A. $\sqrt{3}R_Y$　　B. $3R_Y$　　C. $\frac{1}{3}R_Y$　　D. $\frac{1}{\sqrt{3}}R_Y$

5. 理想电压源的源电压为 U_S，端口电路为 I，则其内阻为(　　)。

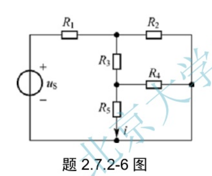
A. I/U_S　　B. ∞　　C. U_S/I　　D. 0

6. 题 2.7.2-6 图所示电路中，已知 $u_S = 28V$，$R_1 = 1\Omega$，$R_2 = R_3 = 2\Omega$，$R_4 = R_5 = 4\Omega$，图中电流 $i =$ (　　)。

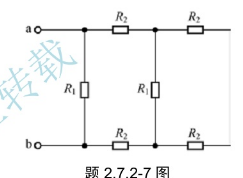
A. 1A　　B. 2A　　C. 2.5A　　D. 4A

7. 题 2.7.2-7 图所示电路中，已知 $R_1 = 10\Omega$，$R_2 = 5\Omega$，a、b 两端的等效电阻 $R =$ (　　)。

A. 6Ω　　B. 5Ω　　C. $20/3\Omega$　　D. $40/3\Omega$



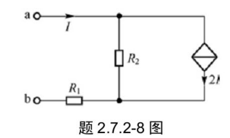
题 2.7.2-6 图



题 2.7.2-7 图

8. 题 2.7.2-8 图所示电路中，已知 $R_1 = 20\Omega$，$R_2 = 5\Omega$，a、b 两端的等效电阻是(　　)。

A. 4Ω　　B. 25Ω　　C. 20Ω　　D. 15Ω



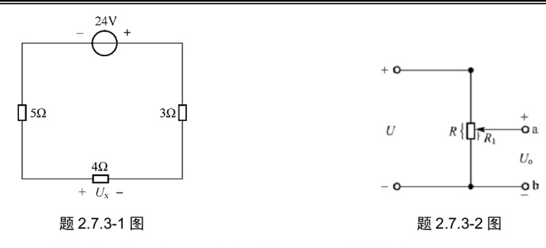
题 2.7.2-8 图

2.7.3　计算题

1. 求题 2.7.3-1 图中所示电路中 U_x。

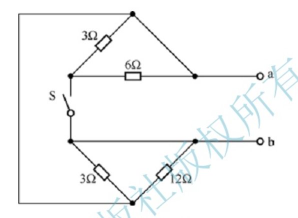
2. 题 2.7.3-2 图所示电路中，已知可变电阻器的电阻 $R = 100\Omega$，电源电压 $U = 220V$，当 a、b 两点开路时，试在下述情况下分别计算电压 U_o：

(1) $R_1 = 0$；(2) $R_1 = 0.5R$；(3) $R_1 = 0.8R$。



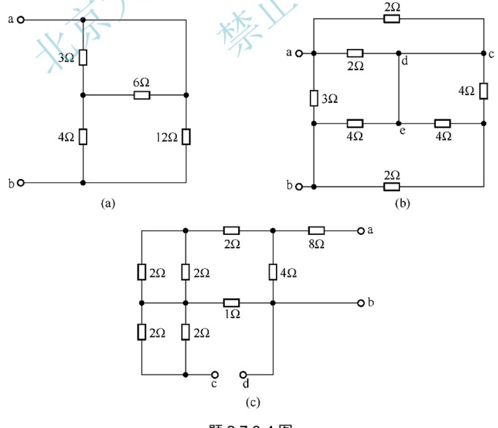
题 2.7.3-1 图　　题 2.7.3-2 图

3. 在题 2.7.3-3 图中将开关 S 打开、合上时的 a、b 两端等效电阻。



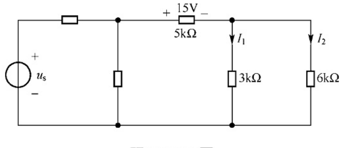
题 2.7.3-3 图

4. 如题 2.7.3-4 图所示电路中，求：(1)图(a)、图(b)中 a、b 两端的等效电阻 R_{ab}；(2)图(c)中 a、b 两端的等效电阻 R_{ab} 及 c、d 两端的等效电阻 R_{cd}。



题 2.7.3-4 图

5. 求题 2.7.3-5 图所示电路中的电流 I_1 和 I_2。



题 2.7.3-5 图

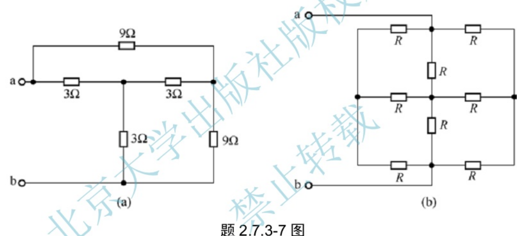
6. 已知两个灯泡额定电压为110V，功率分别为40W和15 W，它们并联在110V的直流电源上，问：

(1) 每只灯泡的电阻和额定电流是多少？

(2) 能否将它们串联在220V 的电源上使用？为什么？

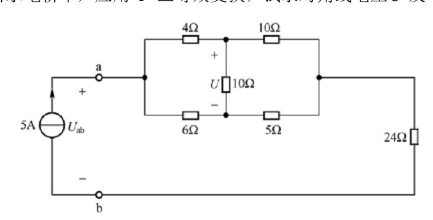
(3) 若有一只220V 、40W和一只220V 、15W 的灯泡串联后接在220V 的电源上使用，会发生什么现象？

7. 求题 2.7.3-7 图所示电路中的等效电阻 R_{eq}。图(b)中所有电阻均为3Ω。



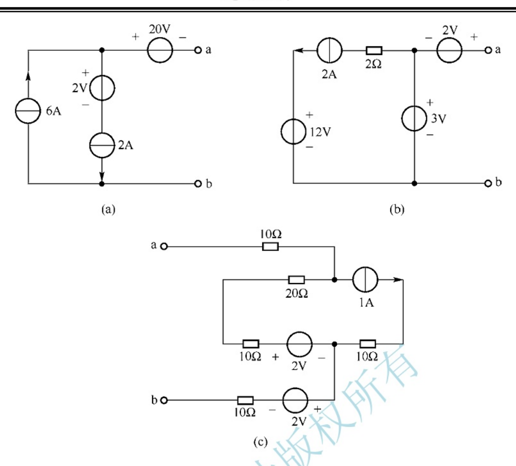
题 2.7.3-7 图

8. 题 2.7.3-8 图所示电桥中，应用 Y−△等效变换，试求对角线电压U 及电压U_{ab}。



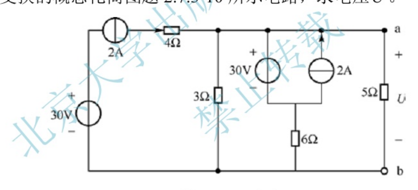
题 2.7.3-8 图

9. 用电源的等效变换的概念，求题 2.7.3-9 图中所示电路的最简等效电路。



题 2.7.3-9 图

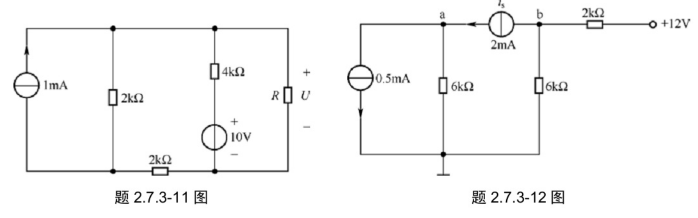
10. 用电源等效变换的概念化简图题 2.7.3-10 所示电路，求电压 U。



题 2.7.3-10 图

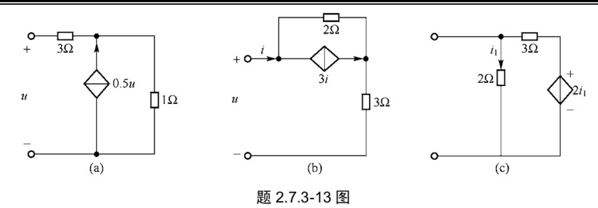
11. 电路如题 2.7.3-11 图所示，已知 $U = 3\text{V}$，用电源等效变换法求电阻 R。

12. 电路如题 2.7.3-12 图所示，求 a、b 点的电位及电流源 i_s 产生的功率 P_s。



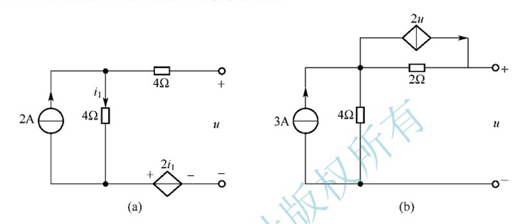
题 2.7.3-11 图　　题 2.7.3-12 图

13. 求题 2.7.3-13 图所示电路的输入电阻。



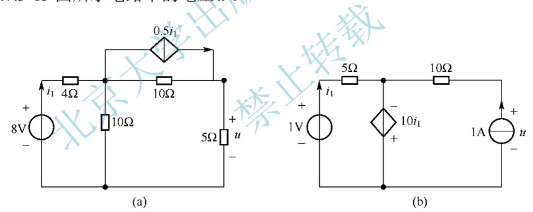
题 2.7.3-13 图

14. 求题 2.7.3-14 图所示电路的端口上伏安关系。



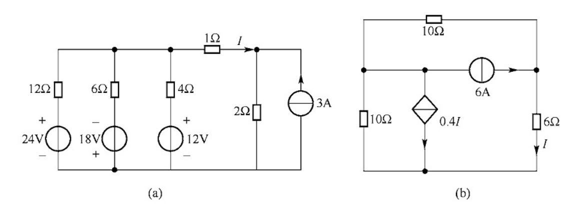
题 2.7.3-14 图

15. 求题 2.7.3-15 图所示电路中的电压 u 。



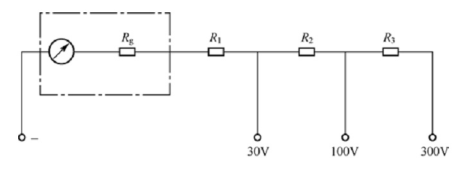
题 2.7.3-15 图

16. 如题 2.7.3-16 图所示电路中，求电流 I 。



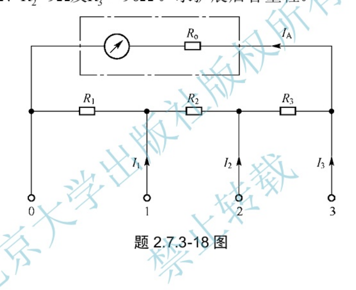
题 2.7.3-16 图

17. 如题 2.7.3-17 图所示是一磁电式微安表，已知表头电流为 100μA 时满量程，其内阻 $R_g = 1500\Omega$，今欲将其改装成量程为 30V、100V、300V，试计算分压电阻 R_1、R_2及R_3的值。



题 2.7.3-17 图

18. 多量程电流表如题 2.7.3-18 图所示，已知表头内阻 $R_o = 2300\Omega$，量程为 50μA，各分流电阻分别为 R_1=1Ω、R_2=9Ω及R_3 = 90Ω。求扩展后各量程。



题 2.7.3-18 图

第 3 章　电路分析的基本方法

教学提示：电路分析问题，大体有两类基本方法：等效变换方法和电路方程方法。第 2 章主要是介绍了等效变换方法。本章将介绍电路的基本分析方法。所谓基本分析方法，就是方程分析法，是以电路元件的约束特性(VCR)和电路的拓扑约束特性(KCL、KVL)为依据，建立以支路电流或回路电流或节点电压等为变量的电路方程组，解出所求的电压、电流和功率。

本章内容以基尔霍夫定律为基础，逐一介绍电路分析的基本方法：支路电流法，网孔电流法，节点电压法，回路分析法，割集分析法，并在此基础上讨论非线性电路的分析、含有理想运算放大器电路的分析以及计算机辅助分析。

教学要求：本章要让学生掌握支路电流法，网孔电流法，节点电压法，回路分析法，割集分析法，并能够熟练应用这些方法对线性电路进行分析；了解非线性电路及其分析方法，能够分析一些简单的非线性电路；掌握理想运算放大器电路模型，并能够对含有理想运放的电路进行分析；了解计算机辅助分析的现状和分析软件，并能够利用现有的电路分析软件对简单的电路进行分析。

3.1　支路电流法

电路由电路元件连接而成，电路中各支路电流受到 KCL 约束，各支路电压受到 KVL 约束，同时，电路的电压和电流还要受到元件特性(如欧姆定律 $u = Ri$)的约束。电路的电压和电流都必须同时满足这两类约束关系。根据电路的结构和参数，列出反映这两类约束关系的并且独立的 KCL、KVL 和 VCR 方程(称为电路方程)，然后求解电路方程就能得到各电压和电流的解答。为此，本章首先要讨论一下 KCL 和 KVL 的独立方程的个数。

3.1.1　KCL 和 KVL 的独立方程数

对于一个电路，大家都知道各个节点的 KCL 关系和各个回路的 KVL 关系。那么对于一个电路有没有必要将每个节点的电流关系都写出来或者将所有回路的电压关系都写出来呢？先看下面这个例子。

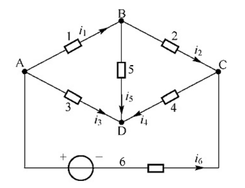
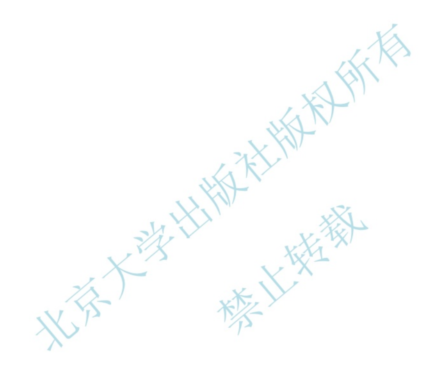


图 3.1　KVL、KCL 独立方程

图 3.1 所示电路，有 A、B、C、D 四个节点，1、2、3、4、5、6 六条支路，各支路的电流参考方向已示出，各支路的电压参考方向与电流参考方向取关联参考方向。

根据基尔霍夫定律，对节点 A、B、C、D 分别列出 KCL 方程，为



$$\left.\begin{aligned} i_1+i_3+i_6&=0\\ -i_1+i_2+i_5&=0\\ -i_2+i_4-i_6&=0\\ -i_3-i_4-i_5&=0 \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

考查式(3.1)中的方程，若将这四个方程相加，得到等号两边都为零的结果，这说明这四个方程不是相互独立的；但任取其中三个方程相加，则可得到剩下的那个方程，即任意三个方程是相互独立的。可以证明：**对于具有 n 个节点的电路，任取其中的 $(n-1)$ 个节点可以列出 $(n-1)$ 个独立的 KCL 方程。**

对于图 3.1 所示的电路，可以查找出许多回路，例如：支路(1，5，3)、(1，2，4，3)、(2，4，5)、(1，2，6)、(3，4，6)等都构成回路。若对回路(1，2，4，3)、(3，4，6)、(1，5，3)按顺时针方向列出 KVL 方程

$$\left.\begin{aligned} u_1+u_2+u_4-u_3&=0\\ u_3-u_4-u_6&=0\\ u_1+u_5-u_3&=0 \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

考查式(3.2)中的方程，因为其中任何一个都不能用另外两个进行加减运算得到，因此，三个方程是相互独立的。若再取这三个回路之外的任何一个回路，比如回路(1，2，6)，按顺时针方向列出 KVL 方程为

$$u_1+u_2-u_6=0 \tag{3.3}$$

显然，式(3.3)方程是不独立的，因为将式(3.2)中的三个方程进行运算可以得到该式。由此，可以得出结论：图 3.1 电路列出的 KVL 独立方程的个数是 3 个，把回路(1，2，4，3)、(3，4，6)、(1，5，3)称为一组独立回路。可以证明：**对于具有 n 个节点、b 条支路的电路，可以列出的 KVL 独立方程的个数是 $(b-n+1)$ 个，即有 $(b-n+1)$ 个独立回路。**

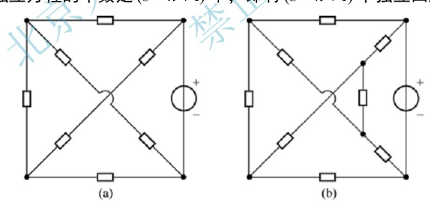


图 3.2　平面电路与非平面电路

能够画在一个平面上而没有支路交叉的电路称为平面电路，否则，称为非平面电路。图 3.2(a)是平面电路，图 3.2(b)是非平面电路。在平面电路中，把内部不存在任何支路和节点的回路称为网孔回路，简称网孔(mesh)。如图 3.1 所示的回路(1，5，3)、(2，4，5)和(3，4，6)都是网孔，而(1，2，4，3)、(1，2，6)等不是网孔。对于三个网孔，按顺时针方向可以列出 KVL 方程

回路(1，5，3)：　$u_1+u_5-u_3=0$

回路(2，4，5)：　$u_2+u_4-u_5=0$

回路(3，4，6)：　$u_3-u_4-u_6=0$

这是一组独立方程。平面电路的全部网孔是一组独立回路，因此回路的独立 KVL 方程数与网孔数相同。

通过这个例子可以得出结论：对于具有 n 个节点 b 条支路的电路，则有 $(b-n+1)$ 个网孔，其独立的 KCL 方程数为 $(n-1)$，独立的 KVL 方程数为 $(b-n+1)$，总共有 b 个独立方程。

3.1.2　支路电流法

根据上面的结论，对于具有 n 个节点 b 条支路的电路，就可以列出 $(n-1)$ 个线性无关的 KCL 方程和 $(b-n+1)$ 个线性无关的 KVL 方程。再加上 b 条支路的 VCR 方程，得到以 b 个支路电压和 b 个支路电流为变量的电路方程(简称为 $2b$ 方程)。$2b$ 方程是最原始的电路方程，是分析电路的基本依据。求解 $2b$ 方程可以得到电路的全部支路电压和支路电流。$2b$ 方程的缺点是方程数太多，给联立方程进行求解带来不便，因此必须设法减少方程和变量的数目。如果电路仅由独立电压源和线性电阻构成，只要将欧姆定律 $u=Ri$ 代入 KVL 方程中，消去全部电阻支路电压，变成以支路电流为变量的 KVL 方程，加上原来的 KCL 方程，便可得到以 b 个支路电流为变量的 b 个线性无关的方程组(称为支路电流方程)，这样，方程数也由 $2b$ 个减少到 b 个，只需求解 b 个方程，就能得到全部支路电流。**以支路电流为未知量，列出独立的 KCL、KVL 方程组，解方程以求得各支路的电流，再根据支路特性求得所需要的电压、功率等，这种分析电路的方法称作支路电流法**(branch current method)。

下面用具体的例子来说明支路电流法。

如图 3.3 所示的电路，各电压源的电压和各电阻均为已知，求各支路电流。把电压源与电阻的串联组合看做一条支路，则此电路有 2 个节点，3 条支路。各支路电流的参考方向如图 3.3 所示。

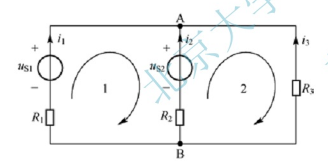


图 3.3　支路电流法举例

取节点 A，应用 KCL 建立独立的节点方程

$$i_1+i_2+i_3=0 \tag{3.4}$$

取网孔 1、2，选取绕行方向如图 3.3 中所示，应用 KVL 和支路的电压电流关系建立以支路电流为未知量的独立回路方程

$$\left.\begin{aligned} R_1i_1-u_{S1}+u_{S2}-R_2i_2=0\\ -u_{S2}-R_3i_3+R_2i_2=0 \end{aligned}\right\}$$

将已知电压移至方程右边并整理，有

$$\left.\begin{aligned} R_1i_1-R_2i_2=u_{S1}-u_{S2}\\ R_2i_2-R_3i_3=-u_{S2} \end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

式(3.4)、式(3.5)就是以 i_1，i_2 和 i_3 为未知量的支路电流方程。

由式(3.4)、式(3.5)可以归纳出

$$\left.\begin{aligned} \sum i_k=0\\ \sum R_ki_k=\sum u_{Sk} \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

式中，R_ki_k 为回路中第 k 个支路的电阻上的电压。公式遍及回路中所有的支路，且当 i_k 电流方向与绕行方向一致时，前面取正号，不一致时，前面取负号。u_{Sk} 为回路中第 k 个支路

的电源电压，电源电压包括电压源也包括电流源两端的电压。在求代数和时当 u_{Sk} 与绕行方向一致时，前面取负号，不一致时，前面取正号。

值得指出的是，还可以采用以支路电压作为未知量的支路电压法(branch voltage method)来建立电路方程进行求解。

3.1.3　支路电流法举例

[例 3.1] 已知电路如图 3.4 所示，其中 $E_1 = 15\text{V}$，$E_2 = 65\text{V}$，$R_1 = 5\Omega$，$R_2 = R_3 = 10\Omega$。试用支路电流法求 R_1、R_2 和 R_3 三个电阻上的电压。

[解] 在电路图上标出各支路电流的参考方向，如图 3.4 所示，选取绕行方向。应用 KCL 对节点 A 列 KCL 方程得：

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

对网孔回路列 KVL 方程：

$$I_1R_1 + I_3R_3 = E_1 \qquad I_2R_2 + I_3R_3 = E_2$$

代入已知数据解方程可得：

$$I_1 = \frac{7}{4}\text{A} \qquad I_2 = \frac{33}{8}\text{A} \qquad I_3 = \frac{19}{8}\text{A}$$

三个电阻上的电压电流方向选取一致，则三个电阻上的电压分别为

$$U_1 = I_1R_1 = \frac{35}{4}\text{V} \qquad U_2 = I_2R_3 = \frac{165}{4}\text{V} \qquad U_3 = I_3R_3 = \frac{38}{4}\text{V}$$

[例 3.2] 试用支路电流法，求图 3.5 所示电路中的电流 I_1、I_2、I_3、I_4 和 I_5(只列方程不求解)。

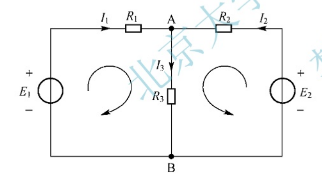


图 3.4　例 3.1 电路图

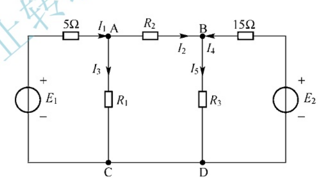


图 3.5　例 3.2 电路图

[解] 在电路图上标出各支路电流的参考方向，如图 3.5 所示，三个网孔回路均选取顺时针绕行方向。应用 KCL 和 KVL 列出方程

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$
$$I_2 + I_4 - I_5 = 0$$
$$5I_1 + I_3R_1 = E_1$$
$$I_2R_2 + I_5R_3 - I_3R_1 = 0$$
$$-I_5R_3 - 15I_4 = -E_2$$

若给定参数，联立方程求解即可得到各支路电流。

[例 3.3] 对图 3.6 电路，试用支路电流法求各支路电流。

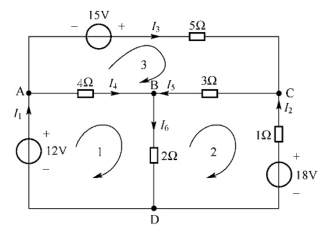


图 3.6　例 3.3 电路图

[解] 该电路的支路数为 6，节点数为 4。

(1) 设各个电流的参考方向如图所示，选择节点 A、B、C 为独立节点，各节点的 KCL 方程为

节点 A：$-I_1+I_3+I_4=0$

节点 B：$-I_4-I_5+I_6=0$

节点 C：$-I_2-I_3+I_5=0$

(2) 选择网孔为独立回路，设各回路的绕行方向均为顺时针方向，如图 3.6 所示，各回路的 KVL 方程为

回路 1：$4I_4+2I_6=12$

回路 2：$-I_2-3I_5-2I_6=-18$

回路 3：$5I_3-4I_4+3I_5=15$

联立以上各式，求得各支路电流为

$$I_1=3\text{A}\qquad I_2=1\text{A}\qquad I_3=2\text{A}$$

$$I_4=1\text{A}\qquad I_5=3\text{A}\qquad I_6=4\text{A}$$

综上所述，可以得到支路电流法解题的一般步骤：

(1) 在电路图上标出设定的各支路电流及其参考方向；

(2) 对 $(n-1)$ 个独立节点，根据 KCL 列出 KCL 方程；

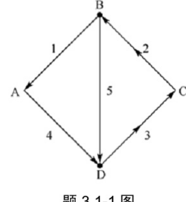
(3) 对 $(b-n+1)$ 个独立回路(一般选网孔)，根据 KVL 列出 KVL 方程；

(4) 联立列出的 KCL 和 KVL 方程，求解出支路电流。

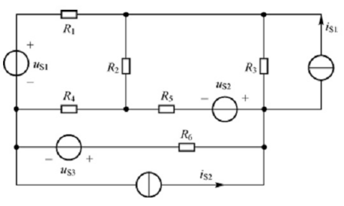
思考与练习

3.1-1　指出题 3.1-1 图中，KCL 和 KVL 独立方程各为多少？并在图上标出网孔。
(KCL 独立方程有 1 个；KVL 独立方程有 2 个。)

3.1-2　指出题 3.1-2 图电路的节点数和支路数：电压源和电阻的串联组合，电流源和电阻的并联组合作为一条支路处理。指出 KCL 和 KVL 独立方程各为多少？并在图上标出网孔。



题 3.1-1 图



题 3.1-2 图

(KCL 独立方程有 3 个；KVL 独立方程有 3 个。)

3.2　网孔电流法

利用支路电流法分析电路，需要列出的方程数与支路数目相同，如果支路过多，列出的方程仍然很多，势必加大计算量，为此需要再找到新的方法来进一步减少方程的数量。本节介绍网孔电流分析法。在引入网孔电流后，可以省去$(n-1)$个节点方程，从而减少了分析电路的计算量。

3.2.1　网孔电流

如图 3.7 所示，由R_1、R_5、R_4构成一个网孔回路，假想有一个电流i_{m1}沿着构成该网孔的各个支路循环流动，电流i_{m1}就称为网孔电流。同样，i_{m2}、i_{m3}是另外两个网孔回路的网孔电流。这里需要说明的是网孔电流实际上是不存在的，电路中真正存在的是支路电流。为了减少列方程的数目，而将支路电流借助于网孔电流来表示。网孔电流的参考方向，同时也是网孔回路的绕行方向。

以图 3.7 为例，图中给出了各支路电流的参考方向和元件参数。设三个网孔电流分别为i_{m1}、i_{m2}、i_{m3}，其流动参考方向为顺时针方向。如果知道了各网孔的电流值，就可以求得电路中任一条支路的电流，进而可以求得电路中任意两点间的电压，因为电路中的所有支路电流都可以用网孔电流来表示。例如R_1支路上的电流i_1就等于i_{m1}，即$i_1=i_{m1}$。R_2支路上的电流i_2就等于i_{m2}，但方向相反，所以$i_2=-i_{m2}$。如果某个支路是两个网孔的共有支路，则该支路上的电流就等于流经该支路的两个网孔电流的代数和。如$i_4=i_{m3}-i_{m1}$，$i_6=i_{m3}-i_{m2}$。因此可以说网孔电流是一组完备的变量。

网孔电流不但是一组完备的变量，而且还是相互独立的变量。因为图 3.7 电路中的网孔电流i_{m1}、i_{m2}、i_{m3}，已知其中任意两个求不出第三个。每一个网孔电流在流入某一节点时同时又从该节点流出，在列出 KCL 方程时，网孔电流会因此而相互抵消。KCL 对网孔电流并无要求，而各个网孔电流之间彼此独立不相关。所以说网孔电流是相互独立的变量。网孔电流的数目就是电路中网孔的个数。

以网孔电流为未知量，根据 KVL 列出网孔电压方程($\sum U=0$)，再根据已求得的网孔电流与支路电流的关系求解支路电流。这种分析电路的方法称为网孔电流法(mesh current method)。

3.2.2　网孔电流法方程

如图 3.7 所示，首先设定网孔电流的参考方向，并以此作为列出 KVL 方程的回路绕行方向。然后，根据 KVL 列出关于网孔电流的电路方程。

$$\left.\begin{aligned}
&R_1 i_{m1}+R_5(i_{m1}-i_{m2})+u_{S4}-R_4(i_{m3}-i_{m1})-u_{S1}=0\\
&R_2 i_{m2}+u_{S2}-R_6(i_{m3}-i_{m2})-R_5(i_{m1}-i_{m2})=0\\
&R_4(i_{m3}-i_{m1})-u_{S4}+R_6(i_{m3}-i_{m2})-u_{S3}+R_3 i_{m3}=0
\end{aligned}\right\}$$

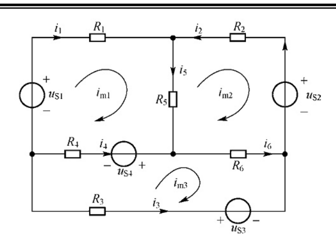


图 3.7　网孔电流法举例

整理得

$$\left.\begin{aligned}(R_1+R_4+R_5)i_{m1}-R_5i_{m2}-R_4i_{m3}&=u_{S1}-u_{S4}\\-R_5i_{m1}+(R_2+R_5+R_6)i_{m2}-R_6i_{m3}&=-u_{S2}\\-R_4i_{m1}-R_6i_{m2}+(R_3+R_4+R_6)i_{m3}&=u_{S3}+u_{S4}\end{aligned}\right\}\tag{3.7}$$

式(3.7)即是以网孔电流为求解对象的网孔电流方程，简称网孔方程。

写成矩阵形式得

$$\begin{bmatrix}R_1+R_4+R_5 & -R_5 & -R_4\\ -R_5 & R_2+R_5+R_6 & -R_6\\ -R_4 & -R_6 & R_3+R_4+R_6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_{m1}\\ i_{m2}\\ i_{m3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_{S1}-u_{S4}\\ -u_{S2}\\ u_{S3}+u_{S4}\end{bmatrix}\tag{3.8}$$

最后，可以归纳出网孔电流方程的一般形式

$$\begin{bmatrix}R_{11} & R_{12} & R_{13}\\ R_{21} & R_{22} & R_{23}\\ R_{31} & R_{32} & R_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_{m1}\\ i_{m2}\\ i_{m3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_{S11}\\ u_{S22}\\ u_{S33}\end{bmatrix}\tag{3.9}$$

式中，R_{ii}称为自电阻，为第i个网孔中各支路的电阻之和，值恒为正。$R_{ij}(i\neq j)$称为互电阻，为第i个与第j个网孔之间公共支路的电阻之和，值可正可负；当相邻网孔电流在公共支路上流向一致时为正，不一致时为负(当各个网孔电流的参考方向均设为顺时针或逆时针时，R_{ij}总为负值)。不含受控源的电路系数矩阵为对称矩阵。u_{Sii}为第i个网孔中的等效电压源。其值为该网孔中各支路电压源电压值的代数和。当电压源方向与绕行方向一致时取负，不一致时取正。

由独立电流源和线性电阻构成的具有m个网孔电路，其网孔方程的一般形式为

$$\left.\begin{aligned}R_{11}i_{m1}+R_{12}i_{m2}+\cdots+R_{1m}&=u_{s11}\\R_{21}i_{m1}+R_{22}i_{m2}+\cdots+R_{2m}&=u_{s22}\\&\cdots\cdots\\R_{m1}i_{m1}+R_{m2}i_{m2}+\cdots+R_{mm}&=u_{smm}\end{aligned}\right\}\tag{3.10}$$

3.2.3　网孔电流法举例

[例 3.4]　用网孔电流法求图 3.8 所示电路中各支路电流。

[解] 选定网孔电流的参考方向如图 3.8 所示，列出网孔方程

$$网孔\ a：(2+1+2)\times I_a-2\times I_b-1\times I_c=6-18$$

$$网孔\ b：(2+6+3)\times I_b-2\times I_a-6\times I_c=18-12$$

$$网孔\ c：(3+1+6)\times I_c-1\times I_a-6\times I_b=25-6$$

整理后

$$5I_a-2I_b-I_c=-12$$

$$-2I_a+11I_b-6I_c=6$$

$$-I_a-6I_b+10I_c=19$$

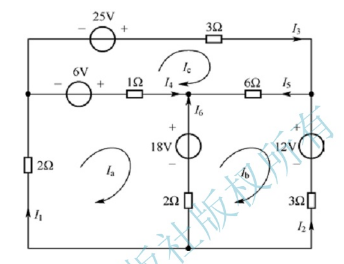


图 3.8 例 3.4 电路图

联立方程组解得

$$I_a=-1\text{A}\quad I_b=2\text{A}\quad I_c=3\text{A}$$

$$I_1=I_a=-1\text{A}\quad I_2=-I_b=-2\text{A}\quad I_3=I_c=3\text{A}$$

$$I_4=I_a-I_c=-4\text{A}\quad I_5=I_c-I_b=1\text{A}\quad I_6=I_b-I_a=3\text{A}$$

从上述例题可以看到，网孔电流法适用于含有电压源的电路，电压源的电压可以直接写在方程式的右边。若电路中含有实际电流源，可以通过电源的等效转换，将电流源转换成电压源处理。如果电路中含有理想电流源，不能转换成电压源则应通过设电流源两端电压，或直接选理想电流源为网孔电流的方法，列方程求解。

[例 3.5] 电路如图 3.9 所示，列出网孔方程。

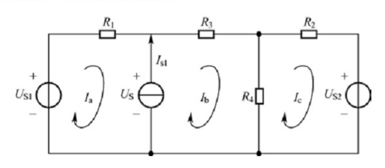


图 3.9 例 3.5 电路图

[解] 设网孔 I_a、I_b、I_c 的参考方向如图 3.9 所示，并设电流源 I_{S1} 两端的电压为 U_S，列出网孔方程

$$网孔\ a：R_1I_a=U_{S1}-U_S$$

$$网孔\text{ b}：(R_3+R_4)I_b-R_4I_c=U_S$$

$$网孔\text{ c}：(R_2+R_4)I_c-R_4I_b=-U_{S2}$$

由于所设U_S为未知量，列出的式子中，三个方程中有四个未知量，要有唯一解还需要再寻找一个等式作为辅助方程，根据电流关系可列出

$$I_{S1}=I_b-I_a$$

[例 3.6]　列出如图 3.10 所示的网孔方程。

[解]　设网孔电流及参考方向如图 3.10 所示。电路有一个独立电压源，还有一个电压控制的电压源，受控源的控制量为u_2，列网孔电流方程时先将受控电压源mu_2当作独立电压源，按照（3.10）所概括的规则写出“初步”的网孔方程，再把受控源的控制量用网孔电流表示。网孔方程为

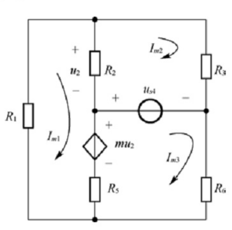


图 3.10　例 3.6 电路图

$$网孔\ 1：(R_1+R_2+R_5)I_{m1}-R_2I_{m2}-R_5I_{m3}=-mu_2$$

$$网孔\ 2：-R_2I_{m1}+(R_2+R_3)I_{m2}=u_{s4}$$

$$网孔\ 3：-R_5I_{m1}+(R_5+R_6)I_{m3}=mu_2-u_{s4}$$

$$辅助方程：u_2=R_2(I_{m1}-I_{m2})$$

含有受控源的电路在列出网孔电压方程时，首先将受控源当做独立源一样看待写出方程式。但方程中会多出一个未知量——受控源的控制量，因此，需要再寻找一个控制量与网孔电流之间的关系式作为辅助方程。

[例 3.7]　电路如图 3.11(a)所示，求 4Ω 电阻上的电流。

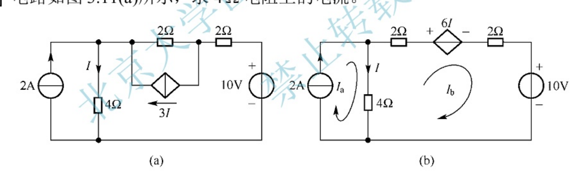


图 3.11　例 3.7 电路图

[解]　首先将受控源按独立源处理，将受控电流源等效转换为受控电压源，如图 3.11(b)所示，设网孔 a 的电流$I_a=2\text{A}$，即为理想电流源的电流。网孔 b 的电流I_b。列出网孔方程

$$(2+2+4)I_b-4I_a=-6I-10$$

辅助方程从图中得到

$$I=I_a-I_b=2-I_b$$

整理并求得

$$I_b=-7\text{A}\qquad I=9\text{A}$$

综上所述，运用网孔电流法列写方程时需要注意：

(1) 选择网孔电流的参考方向时，一般都取顺时针或都取逆时针方向，这样做的好处是互电阻皆取负号。如果各个网孔电流参考方向不一致，注意列写方程时互电阻的符号有正也有负。

(2) 当电路中含有电流源时，可将含有电流源的支路改画到边沿支路上，并将电流源电流设为网孔电流；若不能改画到边沿支路，可设电流源两端电压，列出方程时将这个电压包括在内，同时需要再寻求该电流源电流与相关网孔电流的关系方程，作为辅助方程。

(3) 当电路中含有受控源时，首先把受控源当做独立源一样去处理。若受控源的控制量不是网孔电流时，必须再把控制量用网孔电流来表示，找出这个关系式，作为辅助方程。

特别要注意，以上介绍的网孔电流法仅适用于平面电路。

我们可以总结出网孔电流法的解题步骤：

(1) 首先在电路图中，标出网孔电流及其参考方向。通常设网孔电流的方向均为顺时针(或逆时针)，使网孔方程中互电阻均取“−”号，便于记忆；

(2) 观察电路，直接列出网孔方程；

(3) 求解网孔方程，得到各网孔电流；

(4) 根据支路电流与网孔电流的关系，可求得各支路电流。支路电流与网孔电流方向相同的取正，方向相反取负；

(5) 由支路的伏安特性，可计算出各支路上的电压。

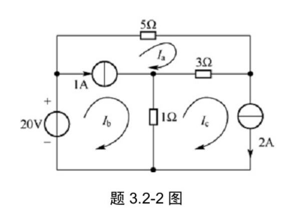
思考与练习

3.2-1　网孔电流与支路电流有什么区别？

(为了减少列方程的数目，假想在电路的每个网孔里有一个电流沿着构成该网孔的各个支路循环流动，这一假想的电流就称为网孔电流。网孔电流实际上是不存在的，电路中真正存在的是支路电流，而支路电流可以用网孔电流的合成来表示。)

3.2-2　如题 3.2-2 图所示，求网孔电流。

($I_a = 3\text{A}$，$I_b = 4\text{A}$，$I_c = 2\text{A}$)



题 3.2-2 图

3.2-3　在列出含有电流源的网孔的网孔电流方程时，为什么要考虑电流源的电压？

(网孔电流法适用于含有电压源的电路，电压源的电压可以直接写在网孔方程式中。当电路中存在电流源时，不能用网孔电流方程式直接建立含有电流源的方程，其原因是没有考虑电流源的电压。若电路中含有实际电流源，可以通过电源的等效转换，将电流源转换成电压源处理。如果电路中含有理想电流源，不能转换成电压源则应通过设电流源两端电压，或直接选理想电流源为网孔电流的方法，列方程求解。)

3.3　节点电压法

网孔电流法以网孔电流为未知量只需列出 $(b-n+1)$ 个 KVL 方程就可以求解电路。本节学习的节点电压法将把节点电压作为未知量，只需列出 $(n-1)$ 个 KCL 方程，就可得到全

部节点电压，然后借助节点电压可求出各支路电压，根据 VCR 方程可求得各支路电流。节点电压法和网孔电流法都是分析电路的基本方法。

3.3.1　节点电压

当用电压表测量电子电路各元件端钮间电压时，常将底板或机壳作为测量基准，把电压表的公共端或“-”端接到底板或机壳上，用电压表的另一端依次测量各元件端钮上的电压。测出各端钮相对基准的电压后，任意两端钮间的电压，可用相应两个端钮相对基准电压之差的方法计算出来。与此相似，在具有 n 个节点的连通电路(模型)中，可以选其中一个节点作为基准节点(称为参考节点)，其余 $(n-1)$ 个节点相对基准节点的电压，称为节点电压(node voltage)。例如在图 3.12 电路中，共有 4 个节点，选节点 0 作基准节点，用接地符号表示，其余三个节点电压分别为 u_{n1}、u_{n2} 和 u_{n3}，如图 3.12 所示。将基准节点作为电位参考点或零电位点，各节点电压就等于各节点电位，即 $u_{n1}=v_1$，$u_{n2}=v_2$，$u_{n3}=v_3$。这些节点电压不能构成一个闭合路径，不能组成 KVL 方程，不受 KVL 约束，是一组完备独立的电压变量。任一支路电压是其两端节点电位之差或节点电压之差，由此可求得全部支路电压。

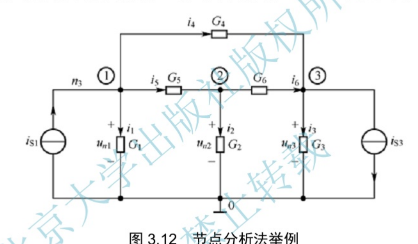


图 3.12　节点分析法举例

例如，图 3.12 所示电路各支路电压可用节点电压表示

$$u_1=u_{n1} \qquad u_2=u_{n2}$$
$$u_3=u_{n3} \qquad u_4=u_{n1}-u_{n3}$$
$$u_5=u_{n1}-u_{n2} \qquad u_6=u_{n2}-u_{n3}$$

以节点电压为未知量，将各支路电流用节点电压表示，列出 $(n-1)$ 个 KCL 方程，求出各节点电压，进而求得各支路电压、电流和功率，这种分析电路的方法称作节点电压法(node voltage method)。

3.3.2　节点方程

如图 3.12 所示电路，对电路的三个独立节点列出 KCL 方程

$$\left.\begin{aligned} i_1+i_4+i_5&=i_{S1}\\ i_2-i_5+i_6&=0\\ i_3-i_4-i_6&=-i_{S3}\end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

这是一组线性无关的方程。列出用节点电压表示的电阻各 VCR 方程

$$\left.\begin{aligned} i_1 &= G_1 u_{n1} \\ i_2 &= G_2 u_{n2} \\ i_3 &= G_3 u_{n3} \\ i_4 &= G_4 (u_{n1} - u_{n3}) \\ i_5 &= G_5 (u_{n1} - u_{n2}) \\ i_6 &= G_6 (u_{n2} - u_{n3}) \end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

式中，G_1、G_2、G_3、G_4、G_5、G_6 为各电阻的电导。

将式(3.12)代入式(3.11)中，经过整理后得到

$$\left.\begin{aligned} (G_1 + G_4 + G_5)u_{n1} - G_5 u_{n2} - G_4 u_{n3} &= i_{S1} \\ -G_5 u_{n1} + (G_2 + G_5 + G_6)u_{n2} - G_6 u_{n3} &= 0 \\ -G_4 u_{n1} - G_6 u_{n2} + (G_3 + G_4 + G_6)u_{n3} &= -i_{S3} \end{aligned}\right\} \tag{3.13}$$

式(3.13)就是图 3.12 电路以三个节点电压为未知量的节点电压法方程，简称节点方程。写成一般形式

$$\left.\begin{aligned} G_{11}u_{n1} + G_{12}u_{n2} + G_{13}u_{n3} &= i_{S11} \\ G_{21}u_{n1} + G_{22}u_{n2} + G_{23}u_{n3} &= i_{S22} \\ G_{31}u_{n1} + G_{32}u_{n2} + G_{33}u_{n3} &= i_{S33} \end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

式中，G_{11}、G_{33}、G_{22} 称为节点自电导，它们分别是各节点全部电导的总和。此例中 $G_{11} = G_1 + G_4 + G_5$，$G_{22} = G_2 + G_5 + G_6$，$G_{33} = G_3 + G_4 + G_6$。$G_{ij}(i \neq j)$ 称为节点 i 和 j 的互电导，是节点 i 和 j 间电导总和的负值，此例中 $G_{12} = G_{21} = -G_5$，$G_{13} = G_{31} = -G_4$，$G_{23} = G_{32} = -G_6$。i_{S11}，i_{S22}，i_{S33} 是流入该节点全部电流源电流的代数和。此例中 $i_{S11} = i_{S1}$，$i_{S22} = 0$，$i_{S33} = -i_{S3}$。

综上可见，由独立电流源和线性电阻构成电路的节点方程，其系数很有规律，可以用观察电路图的方法直接写出节点方程。

由独立电流源和线性电阻构成的具有 n 个节点的连通电路，其节点方程的一般形式为

$$\left.\begin{aligned} G_{11}u_{n1} + G_{12}u_{n2} + \cdots + G_{1(n-1)}u_{n(n-1)} &= i_{S11} \\ G_{21}u_{n1} + G_{22}u_{n2} + \cdots + G_{2(n-1)}u_{n(n-1)} &= i_{S22} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ G_{(n-1)1}u_{n1} + G_{(n-1)2}u_{n2} + \cdots G_{(n-1)(n-1)}u_{n(n-1)} &= i_{S(n-1)(n-1)} \end{aligned}\right\} \tag{3.15}$$

3.3.3　节点电压法举例

[例 3.8] 用节点电压法求图 3.13 电路中各电阻支路电流。

[解] 用接地符号标出参考节点，标出两个节点电压 u_{n1} 和 u_{n2} 的参考方向，如图 3.13 所示。用观察法列出节点方程

$$(1+1)u_{n1} - (1)u_{n2} = 5\text{A}$$
$$-(1)u_{n1} + (1+2)u_{n2} = -10\text{A}$$

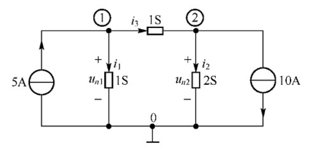


图 3.13　例 3.8 电路图

整理得到

$$2u_{n1} - u_{n2} = 5\text{A}$$
$$-u_{n1} + 3u_{n2} = -10\text{A}$$

解得各节点电压为

$$u_{n1} = 1\text{V} \qquad u_{n2} = -3\text{V}$$

选定各电阻支路电流参考方向如图所示，可求得

$$i_1 = 1\text{A} \qquad i_2 = -6\text{A} \qquad i_3 = 4\text{A}$$

[例 3.9] 用节点电压法求图 3.14(a)电路各支路电压。

[解] 先将图 3.14(a)电阻与电压源串联支路等效变换为电流源与电阻并联，电阻用电导表示，参考节点和节点电压如图 3.14(b)所示。设定节点电压 u_{n1} 为 u_1，节点电压 u_{n2} 为 u_2，节点电压 u_{n3} 为 u_3。用观察法列出 3 个节点方程

$$(2+2+1)u_1 - (2)u_2 - (1)u_3 = 6\text{A} - 18\text{A}$$
$$-(2)u_1 + (2+3+6)u_2 - (6)u_3 = 18\text{A} - 12\text{A}$$
$$-(1)u_1 - (6)u_2 + (1+6+3)u_3 = 25\text{A} - 6\text{A}$$

整理得到

$$5u_1 - 2u_2 - u_3 = -12\text{A}$$
$$-2u_1 + 11u_2 - 6u_3 = 6\text{A}$$
$$-u_1 - 6u_2 + 10u_3 = 19\text{A}$$

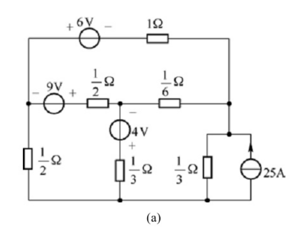
解得各节点电压为

$$u_1 = -1\text{V} \qquad u_2 = 2\text{V} \qquad u_3 = 3\text{V}$$

求得另外三个支路电压为

$$u_4 = u_3 - u_1 = 4\text{V} \qquad u_5 = u_1 - u_2 = -3\text{V} \qquad u_6 = u_3 - u_2 = 1\text{V}$$

当电路中存在独立电压源时，不能用式(3.14)建立含有电压源节点的方程，其原因是没有考虑电压源的电流。若有电阻与电压源串联单口，可以先等效变换为电流源与电阻并联单口后，再用式(3.14)建立节点方程。若没有电阻与电压源串联，则应增设电压源的电流变量来建立节点方程。此时，由于增加了电流变量，需补充电压源电压与节点电压关系的方程。



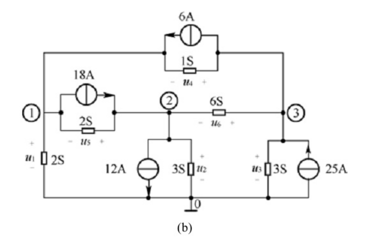


图 3.14　例 3.9 电路图

综上所述，对于由独立电压源，独立电流源和电阻构成的电路来说，其节点方程的一般形式应改为以下形式

$$\left.\begin{aligned}&G_{11}u_{n1}+G_{12}u_{n2}+\cdots+G_{1(n-1)}u_{n(n-1)}+i_{\mathrm{uS}11}=i_{\mathrm{S}11}\\&G_{21}u_{n1}+G_{22}u_{n2}+\cdots+G_{2(n-1)}u_{n(n-1)}+i_{\mathrm{uS}22}=i_{\mathrm{S}22}\\&\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\&G_{(n-1)1}u_{n1}+G_{(n-1)2}u_{n2}+\cdots+G_{(n-1)(n-1)}u_{n(n-1)}+i_{\mathrm{uS}(n-1)(n-1)}=i_{\mathrm{S}(n-1)(n-1)}\end{aligned}\right\}\tag{3.16}$$

式中，$i_{\mathrm{uS}kk}$ 是与第 k 个节点相连的全部电压源电流的代数和，其电流参考方向流出该节点的取正号，相反的取负号。由于变量的增加，需要补充这些电压源与相关节点电压关系的方程，其一般形式如下

$$u_{\mathrm{S}k}=u_{ni}-u_{nj}$$

式中，u_{ni} 是连接到电压源参考极性“+”端的节点电压，u_{nj} 是连接到电压源参考极性“−”端的节点电压。

[例 3.10] 用节点电压法求图 3.15(a)电路的节点电压 u 和支路电流 i_1、i_2。

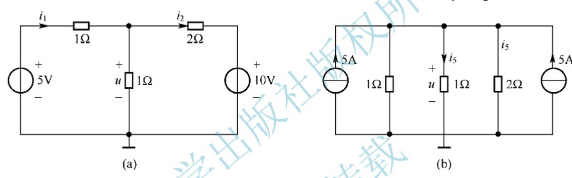


图 3.15　例 3.10 电路图

[解] 先将电压源与电阻串联等效变换为电流源与电阻并联，如图 3.15(b)所示。对节点电压 u 来说，图 3.15(b)与图 3.15(a)等效。只需列出一个节点方程。

$$(1+1+0.5)u=5\mathrm{A}+5\mathrm{A}$$

解得

$$u=4\mathrm{V}$$

按照图(a)电路可求得电源 i_1 和 i_2：

$$i_1=1\mathrm{A}\qquad i_2=-3\mathrm{A}$$

[例 3.11] 用节点电压法求图 3.16 电路的节点电压。

[解] 由于14V 电压源连接到节点①和参考节点之间，节点①的节点电压成为已知量，即 $u_1=14\mathrm{V}$，可以不列出节点①的节点方程。考虑到 8V 电压源电流 i_6，列出②、③的两个节点方程为

$$-(1)u_1+(1+0.5)u_2+i_6=3\mathrm{A}$$

$$-(0.5)u_1+(1+0.5)u_3-i_6=0$$

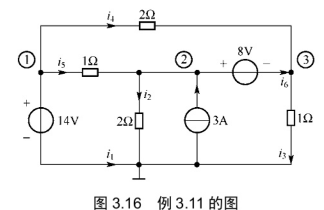


图 3.16　例 3.11 的图

补充方程

$$u_2 - u_3 = 8\text{V}$$

代入 $u_1 = 14\text{V}$，联立方程解得：

$$u_2 = 12\text{V} \qquad u_3 = 4\text{V} \qquad i_6 = -1\text{A}$$

由此例可见，当参考节点选在电压源的一端时，电压源另一端的节点电压成为已知量，此时可以不列该节点的节点方程。

另外，解题过程中增加电压源电流变量建立的一组电路方程，称为改进的节点方程。它扩大了节点方程适用的范围，为很多计算机电路分析程序采用。

[例 3.12] 如图 3.17 所示电路，求 i_1 和 i_2。

[解] 选定 0 为参考点，令独立节点①、②的节点电压为 u_1 和 u_2，如图 3.17 所示。按图 3.17，列出节点方程：

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)u_1 - \frac{1}{4}u_2 = 2 - 0.5i_2$$

$$-\frac{1}{4}u_1 + \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)u_2 = 0.5i_2 + \frac{4i_1}{4}$$

由图可见，控制变量 i_1、i_2 与节点电压的关系为

$$i_1 = \frac{u_1 - u_2}{4}, \quad i_2 = \frac{u_2}{2}$$

由上面几个式子可解出 u_1=6V，u_2=2V。将它们代入上式，得 $i_1 = 0.5\text{A}$，$i_2 = 1\text{A}$。

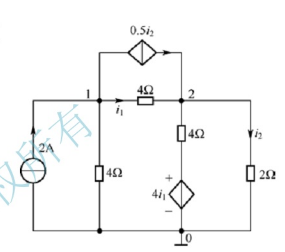


图 3.17　例 3.12 电路图

运用节点电压法列出方程时需要注意：

(1) 在列出节点电压方程时，把实际电压源模型等效成实际电流源模型。并注意互电导的符号为负。

(2) 当电路中含有理想电压源时，将电压源电压设为节点电压；若不能设为节点电压，可设电压源支路上的电流，列出方程时将这个电流包括在内，同时需要再寻求该电压源电压与相关节点电压的关系方程，作为辅助方程。

(3) 当电路中含有受控源时，首先把受控源当做独立源一样去处理。若受控源的控制量不是节点电压时，必须再把控制量用节点电压来表示，找出这个关系式，作为辅助方程。

综上所述，可以总结出节点分析法的解题步骤：

(1) 指定连通电路中任一节点为参考节点，用接地符号表示。标出各节点电压，其参考方向总是独立节点为“+”，参考节点为“−”；

(2) 标出 n 个节点，用观察法列出 $(n-1)$ 个节点方程；

(3) 求解节点方程，得到各节点电压；

(4) 选定支路电流和支路电压的参考方向，计算各支路电流和支路电压。

思考与练习

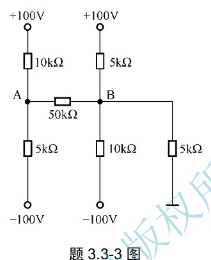
3.3-1　你能改变图 3.16 电路参考节点的选择，只列一个节点方程求出电阻支路电流吗？

3.3-2　为什么在列出含电压源节点的节点方程中，必须考虑电压源电流？

(节点电压法适用于含有电流源的电路，当电路中存在独立电压源时，不能用节点电压方程式建立含有电压源节点的方程，其原因是没有考虑电压源的电流。若有电阻与电压源串联单口，可以先等效变换为电流源与电阻并联单口后，再建立节点方程。若没有电阻与电压源串联，则应增加电压源的电流变量来建立节点方程，由于增加了电流变量，需补充电压源电压与节点电压关系的方程。)

3.3-3　如题 3.3-3 图所示，试用节点分析法求 B 点的电位。

($u_A = -30.1\text{V}$， $u_B = 18.1\text{V}$)



题 3.3-3 图

3.4　回路分析法和割集分析法

3.4.1　图论基础

某一个具体电路之所以具有某种电性能，除了取决于组成该电路的各个元件电性能以外，还取决于这些元件的互相连接，即该电路的结构。显然，结构确定以后，单纯描述这个电路结构所服从的 KCL 和 KVL 方程时，一个元件电路就可以抽象成一个线图。例如图 3.18(a)所示电路就可以抽象成图 3.18(b)。另外，图 3.18(c)所示电路也就可以抽象成图 3.18(b)，与如图 3.18(a)所示电路形成的线图一样，则图 3.18(a)所示电路与图 3.18(c)所示电路为同构电路。先了解图论的几个基本概念。

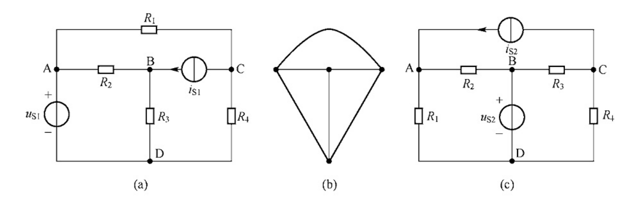


图 3.18　电路抽象成线图举例

图：将电路图中的支路用线条表示，节点保留，所得到的图称为原图的图，以 G 表示。支路、节点分属两个集合，支路必须落在节点上。当移去节点时，与该点相联的支路全部

移去。当移去支路时，节点予以保留。

有向图： 标出各支路电压、电流关联参考方向的图，如图 3.19 所示。

子图： 若图 G_1 的每个节点和每条支路也是图 G 的节点和支路，则称图 G_1 为图 G 的一个子图。如图 3.20(a)、图 3.20(b)所示均为原图 3.19 的子图。

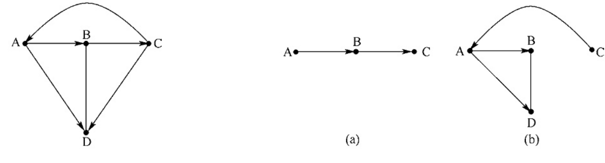


图 3.19　有向图举例　　　　图 3.20　图 3.19 的子图

连通图： 当图 G 中任意两个节点之间至少存在一条由支路所构成的路径时，称为连通图，如图 3.19；反之称为非连通图，如图 3.21 所示电路。

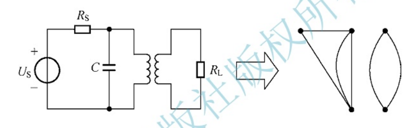


图 3.21　非连通图举例

树： 树是图论中一个非常重要的概念。包含连通图 G 中所有的节点，但不形成回路的连通子图，称为图 G 的树。在图 3.22 中，(b)、(c)、(d)都是(a)的树。可见，同一个图有许多种树。由树的定义可知，树有三个特点：(1)树是连通图，(2)树包含了图的全部节点，(3)树不能含有回路。

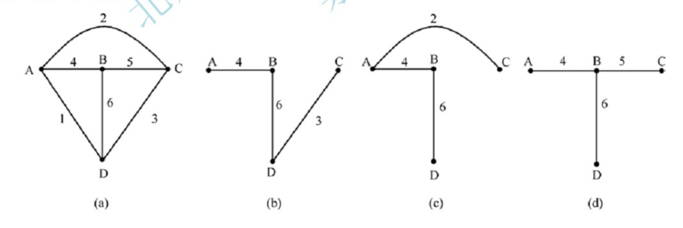


图 3.22　树举例

组成树的支路称为树支，不属于树的支路称为连支。例如图 3.22(b)选支路{4，6，3}为树支，则支路 1，2，5 为连支，图 3.22(c)选支路{2，4，6}为树支，则支路{1，3，5}为连支。

如果连通图 G 有 n 个节点、 b 条支路，则它的任一种树的树支数都为 $(n-1)$，连支数都为 $(b-n+1)$。

3.4.2　回路分析法

网孔电流法仅适用于平面电路。对于非平面电路来说就不能以网孔法来分析，只能用回路法。回路法适用于平面和非平面电路。

回路分析法实际是基本回路电流分析法。先引入基本回路的概念，我们选定树后，每次只接上一条连支，该连支与其他有关的树支组成一个闭合回路，此回路称为“基本回路”，由于基本回路中只有一条连支，连支电流在基本回路流动，称为基本回路电流，基本回路电流的参考方向取与连支电流一致的参考方向。设网络的图有 n 个节点，b 条支路，则回路分析法中基本回路电流的数目应与连支数相等，为 $(b-n+1)$，基本回路电流是一组独立的求解变量，我们对这些基本回路列 KVL 方程就会得到 $(b-n+1)$ 个独立方程。

回路电流分析法方程列写的规律与网孔电流法相同。

以回路电流为未知量，根据 KVL 列出独立的回路电压方程，然后联立求得回路电流，进而求出各支路电流、电压和功率，这种分析电路的方法就是回路分析法(Loop analysis)。

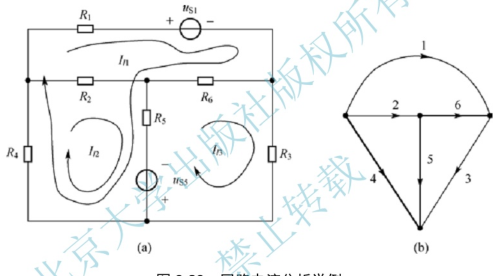


图 3.23　回路电流分析举例

下面再以图 3.23 为例对回路分析法作具体介绍。

图 3.23(a)图选支路 4，5，6 为树支，连支 1 与树支 6，5，4 组成基本回路 1，基本回路电流为 I_{l1}；连支 2 与树支 5，4 组成基本回路 2，基本回路电流为 I_{l2}；连支 3 与树支 5，6 组成基本回路 3，基本回路电流为 I_{l3}。利用 KVL 和欧姆定律列写三个回路方程：

$$(R_1+R_4+R_5+R_6)I_{l1}+(R_4+R_5)I_{l2}-(R_5+R_6)I_{l3}=-u_{S1}+u_{S5} \quad (3.17)$$

$$(R_4+R_5)I_{l1}+(R_2+R_4+R_5)I_{l2}-R_5I_{l3}=u_{S5} \quad (3.18)$$

$$-(R_5+R_6)I_{l1}-R_5I_{l2}+(R_3+R_5+R_6)I_{l3}=-u_{S5} \quad (3.19)$$

观察方程可以得出网孔电流法相类似的规律：

式(3.17)中，I_{l1} 前的系数 $(R_1+R_4+R_5+R_6)$ 是基本回路 1 中所有电阻之和，称它为基本回路 1 的自电阻，用 R_{11} 表示；I_{l2} 前的系数 (R_4+R_5) 是基本回路 1 和基本回路 2 公共支路上的电阻，称它为两个基本回路的互电阻，用 R_{12} 表示，由于流过 (R_4+R_5) 的两个基本回路电流方向相同，(R_4+R_5) 前为正号；I_{l3} 前的系数 (R_5+R_6) 是基本回路 1 和基本回路 3 公共支路上的电阻，用 R_{13} 表示，由于流过 (R_5+R_6) 的两个基本回路电流方向相反，(R_5+R_6) 前为负号，等式右端 $-u_{S1}+u_{S5}$ 表示基本回路 1 中电压源的代数和，用 u_{S11} 表示，u_{S11} 中各电压

源的取号法则是，电压源的电压降方向与回路电流方向一致的取负号，反之取正号。用同样的方法可以得出式(3.18)和式(3.19)。

由此得出回路分析法的标准形式

$$
\begin{aligned}
R_{11}i_{l1} + R_{12}i_{l2} + R_{13}i_{l3} &= u_{S11} \\
R_{21}i_{l1} + R_{22}i_{l2} + R_{23}i_{l3} &= u_{S22} \\
R_{31}i_{l1} + R_{32}i_{l2} + R_{33}i_{l3} &= u_{S33}
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

由于回路分析法是建立在树的基础上的一种分析方法，而树的选取方法有很多种，但为了使解题方便、简单，应选择一棵“合适的树”，树应尽可能这样选：

(1) 把电压源支路选为树支；

(2) 把受控源的电压控制量选为树支；

(3) 把电流源选取为连支；

(4) 把受控源的电流控制量选为连支。

[例 3.13] 用回路分析法求解图 3.24 所示电路。

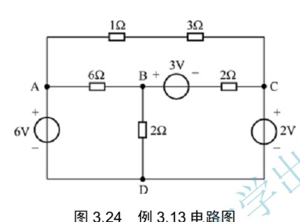


图 3.24　例 3.13 电路图

[解] 图 3.24 电路的拓扑图如图 3.25(a)所示，选支路 AD、DC、CB 为树支。选出的树如图 3.25(a)中粗线所示，回路电流 i_1、i_2、i_3 如图 3.25(b)所示。为方便方程的建立，将树以及回路电流标注在原电路上，如图 3.25(b)所示。

沿基本回路建立 KVL 方程得

$$
\begin{aligned}
(2+2)i_1 + 2i_2 &= -3-2 \\
2i_1 + (2+6)i_2 &= 6-3-2 \\
(1+3)i_3 &= 6-2
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

联立以上方程求解得

$$i_1 = -1.5\text{A} \qquad i_2 = 0.5\text{A} \qquad i_3 = 1\text{A}$$

如按图 3.25(c)所示，选支路 AB，BC，BD 为树支，则所选的基本回路电流正好是网孔电流，回路电压方程正好是网孔电压方程，所以网孔电流法可以说是回路分析法的一个特例。

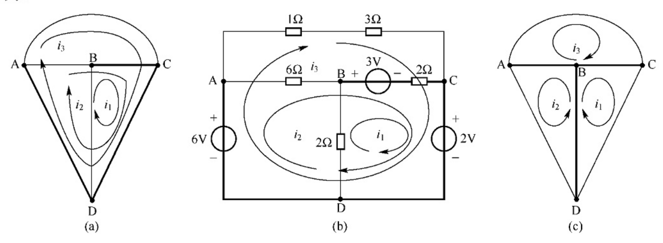


图 3.25　例题 3.13 的拓扑图

[例 3.14] 试用回路电流法求下图 3.26(a)所示电路的电压 u。

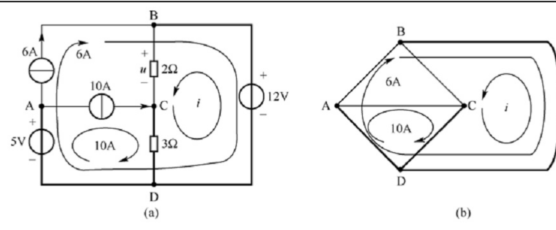


图 3.26　例 3.14 电路图

[解] 图 3.26(b)是图 3.26(a)的拓扑图，选择支路 AD、DB、DC 为树，即图中粗线为树。回路电流有三个，分别为 6A、10A 和 i。由于两个电流源电流被选作回路电流，故只需要列出 i 回路的 KVL 方程即可，为

$$(2+3)i+3\times10=12 \tag{3.22}$$

解得

$$i=-3.6\text{A}$$

所以

$$u=2i=-7.2\text{V}$$

由以上的电路分析可知，当一个电路的电流源较多时，在选择了一个合适的“树”的情况下，采用回路分析法求解电路，可以使求解变量大为减少。因此回路分析法最适合电流源多的电路分析。

综上所述，可以总结出回路法的一般步骤：

(1) 确定一个树选定 $(b-n+1)$ 个基本回路，并确定其绕行方向；

(2) 对 $(b-n+1)$ 个基本回路，以回路电流为未知量，列出 KVL 方程；

(3) 求解上述方程，得到 $(b-n+1)$ 个回路电流；

(4) 求各支路电流(用回路电流表示)。

3.4.3　割集分析法

割集是图论中一个非常重要的概念。若从连通图 G 中移去(或割去)属于 S 的所有支路，则图 G 恰好被分成两个互相分离的部分，但只要少移去其中的一条支路，则图仍然是连通的，这样的支路集 S 称为割集。图 3.27(b)中的支路集{1，4，5}、{5，2，6}、{4，3，2}、{3，4，5，6}等都是割集。

由一条树支和几条连支构成的割集为基本割集。对于有 n 个节点的连通图，其树支数为 $(n-1)$，故有 $(n-1)$ 个基本割集。在图 3.27(b)中，有 4 个节点，则每种树对应 3 个基本割集，如选支路 1，3，2 为树支，则基本割集就是 C_1、C_2、C_3。

割集分析法与回路分析法一样，是建立在“树”的基础上的一种分析方法。**割集分析法是将树支电压作为一组独立的求解变量，根据基本割集建立 KCL 方程，求解电流、电压和功率的电路分析方法。割集分析法又称为割集电压分析法**(cnt-set analysis)。割集分析法的选树原则与回路分析法相同，即尽可能将电压源及电压控制量选为树支，电流源及电流控制量选为连支。

设网络的图有 n 个节点，b 条支路，则割集分析法中基本割集的数目与树支数相等，为 $(n-1)$ 个，树支电压变量也为 $(n-1)$ 个。因此当电路中电压源支路较多时，采用割集分析法最为有效。

下面通过例题说明割集分析法的求解过程。

如图 3.27(a)所示的不含受控电源的电路为例，电路的有向图如图 3.27(b)所示，选择{1、2、3}支路为树，各基本割集如图 3.27(b)所示。写出每个基本割集的 KCL 方程：

$$\left.\begin{aligned} c_1:&\ i_1+i_4+i_5=0 \\ c_2:&\ i_{S2}+i_5-i_6=0 \\ c_3:&\ i_3-i_4-i_5+i_6=0 \end{aligned}\right\} \tag{3.23}$$

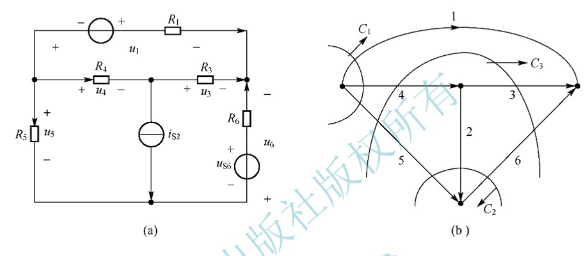


图 3.27　割集分析法举例

为得出以树支电压 u_1、u_2、u_3 为求解变量的网络方程，先写出用支路电压表示的支路电流方程，再用树支电压表示各支路电压：

$$\left.\begin{aligned} i_1&=\frac{u_1+u_{S1}}{R_1}=G_1(u_1+u_{S1}) \\ i_3&=\frac{u_3}{R_3}=G_3u_3 \\ i_4&=\frac{u_4}{R_4}=\frac{u_1-u_3}{R_4}=G_4(u_1-u_3) \\ i_5&=\frac{u_5}{R_5}=\frac{u_1+u_2-u_3}{R_5}=G_5(u_1+u_2-u_3) \\ i_6&=\frac{u_{S6}-u_2+u_3}{R_6}=G_6(u_{S6}-u_2+u_3) \end{aligned}\right\} \tag{3.24}$$

将式(3.24)代入式(3.23)，有

$$\left.\begin{aligned} &G_1(u_1+u_{S1})+G_4(u_1-u_3)+G_5(u_1+u_2-u_3)=0 \\ &i_{S2}+G_5(u_1+u_2-u_3)-G_6(u_{S6}-u_2+u_3)=0 \\ &G_3u_3-G_4(u_1-u_3)-G_5(u_1+u_2-u_3)+G_6(u_{S6}-u_2+u_3)=0 \end{aligned}\right\} \tag{3.25}$$

整理可得

$$\left.\begin{aligned}&(G_1+G_4+G_5)u_1+G_5u_2-(G_4+G_5)u_3=-G_1u_{S1}\\&G_5u_1+(G_5+G_6)u_2-(G_5+G_6)u_3=-i_{S2}+G_6u_{S6}-\\&(G_4+G_5)u_1-(G_5+G_6)u_2+(G_3+G_4+G_5+G_6)u_3=-G_6u_{S6}\end{aligned}\right\}\tag{3.26}$$

方程组(3.26)就是图 3.27(a)所示电路的割集方程。为了便于分析，将式(3.26)写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix}G_1+G_4+G_5 & G_5 & -(G_4+G_5)\\ G_5 & (G_5+G_6) & -(G_5+G_6)\\ -(G_4+G_5) & -(G_5+G_6) & (G_3+G_4+G_5+G_6)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-G_1u_{S1}\\-i_{S2}+G_6u_{S6}\\-G_6u_{S6}\end{bmatrix}\tag{3.27}$$

由式(3.27)可以看到，左侧矩阵为树支电压列阵的系数矩阵，在网络不含有受控源电源时为对称矩阵。其对角线上的矩阵 G_{ii}，它是第 i 个割集方程中树支电压 u_i 前的系数，其值可以表示为割集 i 切割的所有支路电导之和。G_{ii} 称为割集 i 的自电导，对于不含有受控源电源的网络，G_{ii} 恒为正值。

矩阵中非主对角线上的元素 G_{ij} ($i\neq j$)称为割集 i 和割集 j 之间的互电导，它是割集方程中 u_j 前的系数，是割集 i 和割集 j 所有共有支路电导的代数和，若支路 k 为割集 i 和割集 j 所共有支路，如果两割集的参考方向对共有支路而言是相同的，该项取正值；反之，如果两割集的参考方向对共有支路而言是相反的，该项取负值。

割集方程式(3.27)右侧项为电源电流的代数和，其意义是将电路中的电压源等效变成电流源，再与电流源电流求代数和，它是两种电源电流的总和。如果电流源 i_{Sk} 属于割集 i，且电流源 i_{Sk} 的参考方向与割集 i 的方向是相同的，该项取负值；反之，如果电流源 i_{Sk} 的参考方向与割集 i 的方向是相反的，该项取正值。

[例 3.15]　电路如图 3.28(a)所示。求节点①与节点②之间的电压 u_{12}。

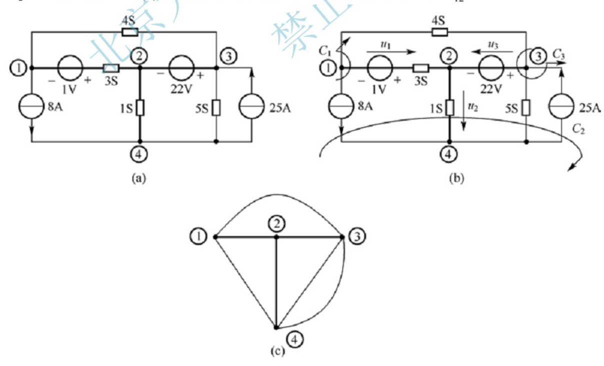


图 3.28　例 3.15 电路图

[解] 选树支电压如图 3.28(b)所示，分别为u_1、u_2和u_3。

已知$u_3 = 22\text{V}$，可以不建立关于u_3的基本割集方程。另外两个基本割集的 KCL 方程分别为

$$C_1：\ (4+3)u_1 - 4\times 22 = -8 - 3\times 1$$

$$C_2：\ (5+1)u_2 + 5\times 22 = 25 - 8$$

以上两式联立求解得

$$u_1 = 11\text{ V} \qquad u_2 = -15.5\text{V}$$

所以
$$u_{12} = u_1 = 11\text{V}$$

[例 3.16] 电路如图 3.29(a)所示。已知：$G_1 = 1\text{S}$，$G_2 = 2\text{S}$，$G_3 = 3\text{S}$，$G_5 = 5\text{S}$，$u_{\text{S1}} = 1\text{V}$，$u_{\text{S3}} = 3\text{V}$，$u_{\text{S4}} = 4\text{V}$，$u_{\text{S6}} = 6\text{V}$，$i_{\text{S3}} = 3\text{A}$。试用割集分析法求电流$i_1$以及电压源$u_{\text{S1}}$发出的功率$P$。

[解] 选树如图粗线所示，树支电压如图 3.29(c)所示，为u_1、u_4和u_6。

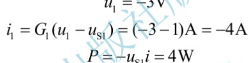
因为$u_4 = u_{\text{S4}} = 4\text{V}$，$u_6 = u_{\text{S6}} = 6\text{V}$，所以可以不建立关于$u_4$和$u_6$的基本割集方程，故只需要列关于$u_1$的基本割集方程。基本割集$C_1$如图 3.29(b)所画，其方程为

$$(G_1 + G_2 + G_5)u_1 + (G_2 + G_5)u_{\text{S6}} - G_5 u_{\text{S4}} = G_1 u_{\text{S1}} - i_{\text{S3}}$$

$$8u_1 + 24 = 0$$

即
$$u_1 = -3\text{V}$$

得
$$i_1 = G_1(u_1 - u_{\text{S1}}) = (-3-1)\text{A} = -4\text{A}$$



所以
$$P = -u_{\text{S1}}i = 4\text{W}$$

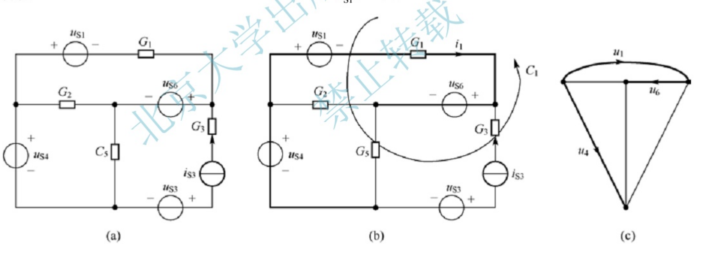


图 3.29　例 3.16 电路图

综上所述，不难总结出割集分析法的解题步骤：

(1) 画出电路的拓扑图，选一个“合适”的树；

(2) 画出基本割集及其参考方向，基本割集的参考方向与树支电压方向相同；

(3) 写出基本割集的 KCL 方程；

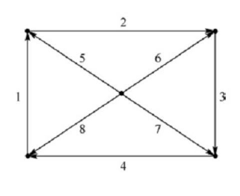
(4) 联立求解，得树支电压；

(5) 利用树支电压求得电路的其他未知量。

思考与练习

3.4-1　如图 3.4-1 所示拓扑图，试画出三种可能的树及其基本回路。

(选择支路集{1，2，3，7}为树，则支路集{1，2，3，4}，{2，3，7，5}，{3，7，6}，{1，2，3，7，8}等均为基本回路；若选择支路集{5，6，7，8}为树，则支路集{1，5，8}，{2，6，5}，{3，7，6}，{4，8，7}等均为基本回路；若选择支路集{1，5，7，3}，则支路集{1，5，7，4}，{2，3，7，5}，{1，5，8}，{3，7，6}等均为基本回路。)



题 3.4-1 图

3.4-2　思考一下割集分析法的注意事项和解题步骤。

(割集分析法解题时应注意：(1)树的选取；(2)基本割集的选取；(3)基本割集参考方向的选取；(4)含有受控源与理想独立源的处理。

割集分析法的解题步骤：(1)画出电路的拓扑图，选一个“合适”的树，并给各支路定向；(2)画出基本割集及其参考方向，基本割集的参考方向与树支电压方向相同；(3)写出基本割集的 KCL 方程。(4)联立求解，得树支电压；(5)利用树支电压求得电路的其他物理量。)

*3.5　非线性电路分析

由电压源、电流源和电阻元件构成的电路，称为电阻电路。由独立电源和线性电阻构成的电阻电路，称为线性电阻电路，否则称为非线性电阻电路。前面的电路分析方法都是对于线性电路而说的。其依据主要是 KCL、KVL 和元件的 VCR，分析非线性电阻电路的基本依据仍然是 KCL、KVL 和元件的 VCR。本节只讨论简单非线性电阻电路的分析，为学习电子电路打下基础。

3.5.1　非线性电阻元件

电压电流特性曲线是通过 $u-i$ 平面坐标原点的直线的二端电阻，称为线性电阻；否则称为非线性电阻。按照非线性电阻特性曲线的特点可以将它们进行分类。**其电流是端电压的单值函数的电阻，称为压控电阻**，用 $i=g(u)$ 表示；如图 3.30(a)所示隧道二极管是压控电阻。**其电压是电流的单值函数的电阻，称为流控电阻**，用 $u=f(i)$ 表示；图 3.30(b)和图 3.30(c)的普通二极管和氖灯是流控电阻，而图 3.30(d)所示理想二极管既不是流控电阻，又不是压控电阻。

其特性曲线对称于原点的电阻，称为双向电阻；否则称为单向电阻。图 3.30(c)所示氖灯是双向电阻，图 3.30(a)，图 3.30(b)，图 3.30(d)所示隧道二极管、普通二极管和理想二极管都是单向电阻。单向性的电阻器件在使用时必须注意它的正负极性，不能任意交换使用。

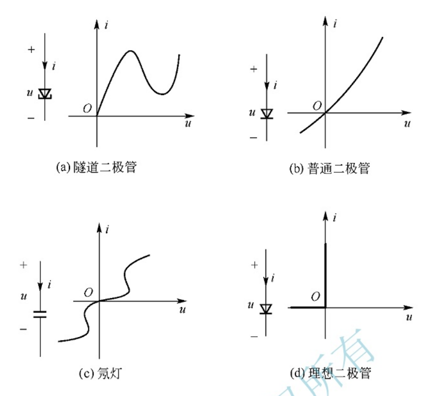


图 3.30　常用非线性电阻的特性曲线

理想二极管是开关电路中常用的非线性电阻元件。其参考方向如图 3.30(d)所示时，其电压电流关系为

$$\begin{cases} i = 0 & \text{当}\, u < 0\,\text{时} \\ u = 0 & \text{当}\, i > 0\,\text{时} \end{cases}$$

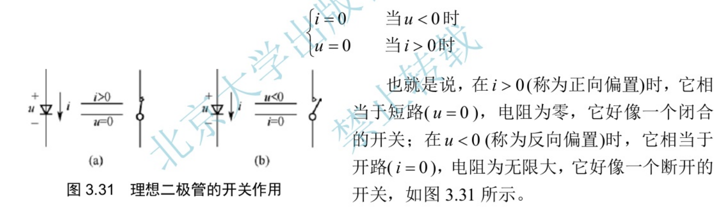


图 3.31　理想二极管的开关作用

也就是说，在 $i > 0$(称为正向偏置)时，它相当于短路($u = 0$)，电阻为零，它好像一个闭合的开关；在 $u < 0$ (称为反向偏置)时，它相当于开路($i = 0$)，电阻为无限大，它好像一个断开的开关，如图 3.31 所示。

3.5.2　非线性电阻电路的图解法

由线性电阻组成的单口网络，就端口特性而言，等效于一个线性电阻，其电阻值可用串联和并联等效电阻的公式求得。由非线性电阻(也可包含线性电阻)组成的单口网络，就端口特性而言，等效于一个非线性电阻，其 VCR 特性曲线可用图解法求得。**图解法是用作图来得到非线性电阻电路的电流、电压等未知量的分析方法**。这是求解非线性方程组的重要方法之一。

图 3.32(a)表示含一个非线性电阻的电路，它可以看做是一个线性含源电阻单口网络和一个非线性电阻的连接，如图 3.32(b)所示。图中所示非线性电阻可以是一个非线性电阻元件，也可以是一个含非线性电阻的单口网络的等效非线性电阻。这类电路的分析方法如下：

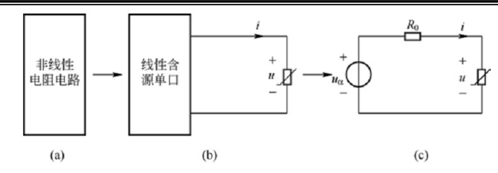


图 3.32　含一个非线性电阻的电路

(1) 将线性含源电阻单口网络用戴维南(或诺顿)等效电路代替，如图 3.32(c)所示。

$$\left.\begin{aligned} u &= u_{oc} - R_o i \\ i &= g(u) \end{aligned}\right\} \tag{3.28}$$

(2) 写出戴维南等效电路和非线性电阻的 VCR 方程。

$$u = u_{oc} - R_o g(u) \tag{3.29}$$

这是一个非线性代数方程。若已知 $i = g(u)$ 的解析式，则可用解析法求解；若已知 $i = g(u)$ 的特性曲线，则可用以下图解法求非线性电阻上的电压和电流。

在 u–i 平面上画出戴维南等效电路的 VCR 曲线。它是通过(u_{oc}，0)和(0，u_{oc}/R_o)两点的一条直线。该直线与非线性电阻特性曲线 $i = g(u)$ 的交点为 Q，对应的电压和电流是式(3.28)的解答。交点 $Q(u_Q,\ I_Q)$ 称为“工作点”。直线 $u = u_{oc} - R_o i$ 称为“负载线”，如图 3.33 所示。

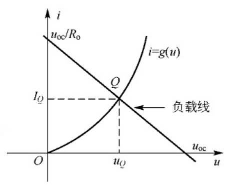


图 3.33　工作点的确定

求得端口电压和电流后，可用电压源或电流源替代非线性电阻，再用线性电路分析方法求含源单口网络内部的电压和电流。

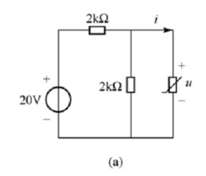
[例 3.17] 图 3.34(a)所示的电路，已知非线性电阻特性曲线如图 3.34(b)中折线所示。用图解法求电压 u 和电流 i。

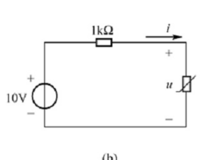
[解] 求线性含源电阻单口的戴维南等效电路，得到 $u_{oc} = 10\text{V}$，$R_o = 1\text{k}\Omega$。于是，图 3.34(a)等效变换为图 3.34(b)。在图 3.34(c)的 $u-i$ 平面上，通过(10V，0)和(0，10V/1kΩ)两点作直线，它与非线性特性曲线交于 Q_1、Q_2 和 Q_3 三点。这三点相应的电压 u 和电流 i 分别为

$$Q_1:\quad U_Q = 3\text{V} \qquad I_Q = 7\text{mA}$$

$$Q_2:\quad U_Q = 5\text{V} \qquad I_Q = 15\text{mA}$$

$$Q_3:\quad U_Q = 6.5\text{V} \qquad I_Q = 3.5\text{mA}$$





(c)

图 3.34　例 3.17 电路图

此例说明非线性电阻电路可以存在多个解答。究竟工作于哪个点，与实际电路的具体情况有关。

总之，电路中存在的非线性电阻元件较少时，图解法是一种有效的方法，只存在一个非线性电阻的电路，非线性电阻元件以外的线性二端网络的外特性和非线性元件的伏安特性的交点就是所求的解。

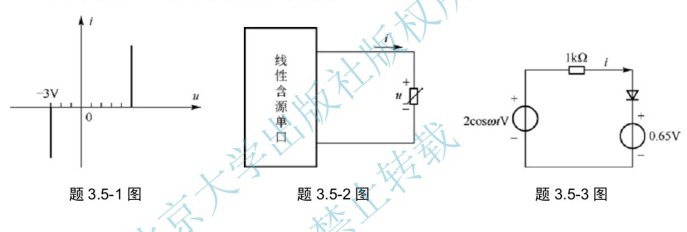
思考与练习

3.5-1　试设计一个电阻单口网络，其 VCR 特性如题 3.5-1 图所示曲线。

3.5-2　电路如题 3.5-2 图所示。试用负载线法求非线性负载电阻满足什么条件时获得最大功率？

　　($R_L = R_0$时，$P_{L\max} = \dfrac{u_{\alpha}^2}{4R_0}$)

3.5-3　试画出题 3.5-3 图电路中电流 i 的波形。



题 3.5-1 图　　题 3.5-2 图　　题 3.5-3 图

3.6　含有运算放大器的电路分析

运算放大器(operational amplifier)的应用日益广泛，它是电路理论中一个重要的多端元件。本节介绍运算放大器的电路模型，运用放大器在理想化情况下的特性，以及具有运算放大器的电阻电路的分析。另外介绍一些典型电路，如比例器，加法器等。

3.6.1　运算放大器模型

运算放大器简称运放，是一种多端集成电路，通常由数十个晶体管和一些电阻构成。现已有上千种不同型号的集成运放，是一种价格低廉、用途广泛的电子器件。早期，运放用来完成模拟信号的求和、微分和积分等运算，故称为运算放大器。现在，运放的应用已远远超过运算的范围。它在通信、控制和测量等设备中得到广泛应用。

运算放大器基本上是高放大倍数的直接耦合的放大器。放大器的内部结构虽然很复杂，但制成品只有几个端点和外部电路连接。因此，如果从电路分析的角度，只是把它看成一种电路元件对待，只需了解运算放大器的外部特性及其等效电路就可以了。

运算放大器的图形符号如图 3.35(a)所示，它有两个电源端(称偏置电源)分别与直流电源相接，E^+ 端接正电压，E^- 端接负电压，这是保证运算放大器内部正常工作所必需的。在分析运放时，可以不考虑偏置电源。这时可采用图 3.35(b)所示电路符号。

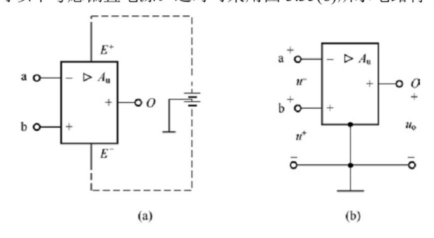


图 3.35　运算放大器的图形符号

左侧 a“−”端为反相输入端，当信号由此端对地输入时，输出信号与输入信号反相位，反相输入端的电位用 u^- 表示。

左侧 b“+”端为同相输入端，当信号由此端对地输入时，输出信号与输入信号同相位，同相输入端的电位用 u^+ 表示。

运算放大器的输入有三种方式：

(1) 如果从 a 端和 b 端分别同时加入电压 u^- 和 u^+，则有

$$u_o = A_u(u^+ - u^-) = A_u u_d \tag{3.30}$$

式中，$u_d = u^+ - u^-$，A_u 为运放的电压放大倍数(或电压增益的绝对值)。运放的这种输入情况称为差动输入，u_d 称为差动输入电压。

(2) 只在反相输入端输入电压，即其“+”端接地，则有

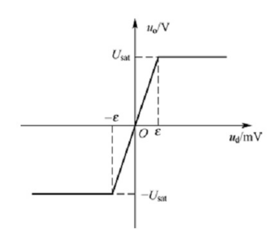
$$u_o = -A_u u^-$$

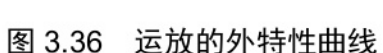
(3) 只在同相输入端输入电压，即其“−”端接地，则有

$$u_o = A_u u^+$$

运放的输出电压 u_o 与差动输入电压 u_d 之间的关系可以用图 3.36 近似的表示。在 $-\varepsilon \leqslant u_d \leqslant \varepsilon$ (ε 很小时)的范围内，u_o 与 u_d 的关系用通过原点的一段直线表示，其斜率等于 A_u。由于放大倍数 A_u 值很大，所以这段直线很陡。当输入电压 u_d 达到一定数值后就趋于饱和，图中用 $\pm U_{sat}$ 表示。此饱和电压值略低于直流偏置电压值，这个关系曲线称为运放的外特性。

图 3.37 为运放的电路模型，其中电压控制电压源的电压为 $A(u^+ - u^-)$，R_{in} 为运放的输入电阻，R_o 为运放的输出电阻。实际运放 R_{in} 较大，R_o 较小。本节我们把运放工作范围局限在线性段。即假设：$-U_{sat} \leqslant u_o \leqslant U_{sat}$。放大倍数 A 很大，而饱和电压一般为正负十几伏或几伏，这样输入电压必须很小。运放的这种工作状态称为“开环运行”，A_u 就称为开环放大倍数，在实际的应用中，往往通过一定的方式把输出的一部分返回(反馈)到输入中去，这种工作状态称为“闭环运行”。




图 3.36　运放的外特性曲线

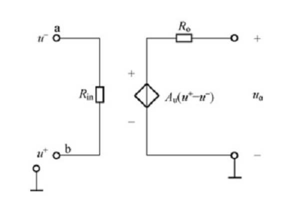


图 3.37　运放的电路模型

在 $-U_{sat} \leqslant u_o \leqslant U_{sat}$ 范围内，**如果假设运放的电路模型的 R_{in} 无穷大，R_o 为零，且认为 A_u 为无穷大，则称为这种运放为理想运放。**并且在表示运放的图形符号中加上“∞”以说明，否则用 A 表示。

新国标中，运放及理想运放的符号分别如图 3.38(a)及图 3.38(b)所示。

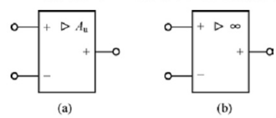


图 3.38　运算放大器的新国标符号

实际运放的工作情况比以上所介绍的要复杂一些。比如，放大倍数 A_u 不仅为有限值，而且随着频率的增高而下降。通常，图 3.37 所示电路模型在输入电压频率较低时是足够精确的。为了简化分析起见，今后讨论的运算放大器是理想运算放大器。

3.6.2　含理想运放的电路分析

1. 含理想运放的电路分析原则

所谓“理想运放”，是指图中模型的电阻 R_{in} 为无穷大、R_o 为零，A 为无穷大的情况。由此可以得出含有理想运放的电路的分析方法。根据输入/输出特性，可以得出含有理想运放器件的电路的分析原则。

虚短：由于理想运放的线性段放大倍数 $A_u=\infty$，而输出电压 $u_o = A_u(u^+ - u^-) = A_u u_d$ 为有限值，则有：

$$\boxed{u^+ - u^- = 0} \tag{3.31}$$

这就是所谓的“虚短”。在分析计算中，运放的同相端与反相端等电位。

虚断：理想运放工作在线性区内时，由于 $R_i=\infty$，所以反相输入端和同相输入电流均为零，即

$$\boxed{i^+ = i^- = 0} \tag{3.32}$$

通常称为“虚断路”。在分析计算含运放的电路时，可以将运放的两个输入端视为开路。

虚地：当运放的同相端(或反相端)接地时，运放的另一端也相当于接地，一般称为“虚地”。

合理地运用这些条规则，并与节点法结合起来加以运用，将使这类电路的分析大为简化。下面举一些实例来说明。

2．含理想运放的电路分析举例

[例 3.18] 反相比例器。已知反相比例器电路如图 3.39 所示。求：该电路的输入/输出关系。

[解] 由于“虚短”，则 $u^- = 0$。因为

$$i = \frac{u_\text{i} - u^-}{R} = \frac{u_\text{i} - 0}{R} = \frac{u_\text{i}}{R}$$

$$i_\text{F} = \frac{u^- - u_\text{o}}{R_\text{F}} = \frac{0 - u_\text{o}}{R_\text{F}} = -\frac{u_\text{o}}{R_\text{F}}$$

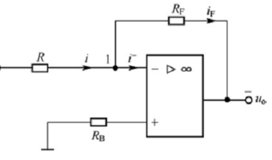


图 3.39　例 3.18 电路图

由于“虚断”，理想运放的输入电流为零，即 $i^- = 0$，所以 $i = i_\text{F}$

$$i = \frac{u_\text{i}}{R} = i_\text{F} = -\frac{u_\text{o}}{R_\text{F}}$$

因此

$$u_\text{o} = -\frac{R_\text{F}}{R} u_\text{i}$$

由此可见，当可以通过改变电阻 R、R_F 的大小，从而使得电路的比例系数改变。该电路正是一个由运放构成的反相比例器。

注意：其中 R_B 称为平衡电阻，主要作用是保持运放输入级电路的对称性。其他的运放电路中均有此平衡电阻存在，只是具体的计算不在本课程中讲述。

[例 3.19] 加法器。已知加法器电路如图 3.40 所示。求：该电路的输入/输出关系。

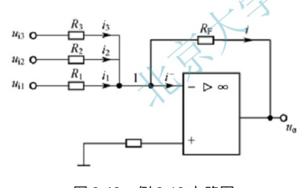


图 3.40　例 3.19 电路图

[解] 由于“虚断”，理想运放的输入电流为零，即 $i^- = 0$，所以

$$i = i_1 + i_2 + i_3$$

由于“虚短”，则节点 1 的电位为零。列出方程：

$$i_3 = \frac{u_\text{i3} - 0}{R_3} = \frac{u_\text{i3}}{R_3} \qquad i_2 = \frac{u_\text{i2} - 0}{R_2} = \frac{u_\text{i2}}{R_2}$$

$$i_1 = \frac{u_\text{i1} - 0}{R_1} = \frac{u_\text{i1}}{R_1} \qquad i = \frac{0 - u_\text{o}}{R_\text{F}} = -\frac{u_\text{o}}{R_\text{F}}$$

对节点 1 列出 KCL 节点方程，有

$$i = i_1 + i_2 + i_3$$

所以

$$u_\text{o} = -R_\text{F}\left(\frac{u_\text{i1}}{R_1} + \frac{u_\text{i2}}{R_2} + \frac{u_\text{i3}}{R_3}\right)$$

由此可见，当 $R_1 = R_2 = R_3 = R_\text{F}$ 时，$u_\text{o} = -(u_{i1} + u_{i2} + u_{i3})$，其实，该电路正是一个由运放构成的反相加法器。

综上所述，含有理想运放的电路分析特点：

(1) 反相输入端和同相输入端的输入电流均为零[可称为“虚断(路)”]；

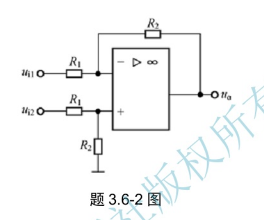
(2) 对于公共端(地)来说，反相输入端的电压与同相输入端的电压相等[可称为：“虚短(路)”]。

思考与练习

3.6-1　分析一下反相器电路，思考反相器是如何实现的？

3.6-2　减法器如题 3.6-2 图所示。思考减法器的输入/输出关系。

$(u_o = \frac{R_2}{R_1}(u_2 - u_1))$



题 3.6-2 图

*3.7　计算机辅助电阻电路分析

电路的分析和设计都需要完成一定的数学运算工作。人们曾经使用计算尺和计算器来完成一定的计算工作，随着计算机和大规模集成电路的发展，现在已经广泛使用计算机来辅助电路的分析和设计。计算机是一种智能的计算工具，不仅能在很短的时间完成大量的数学运算，还能够自动建立电路方程，并将计算结果进行处理，用图形和动画的形式表现出来。因此，在学习电路理论课程时，有必要了解计算机分析电路的基本方法和使用计算机来辅助电路理论课程的教学(CAI)工作。

3.7.1　电路模型的矩阵表示方法

利用已有计算机程序辅助电路分析设计的基本方法是首先将电路模型的有关数据告诉计算机，再用人机对话的方式，告诉需要计算机做哪些分析计算工作，并将计算结果输出到屏幕或打印机或文件中。人们对计算结果进行分析研究后，可以对电路的结构和参数进行修改后重新进行分析计算，直到满意为止，如下所示。

电路模型 ⟶ 计算机 ⟶ 输出计算结果
↑
指令

利用计算机来分析电路时，不需要考虑采用哪种分析方法和列出电路方程，也不必花费很多时间去求解电路方程，并检验计算结果是否正确。用计算机辅助电路分析，能够用

较少的时间分析更多的更复杂的电路，可以用更多的精力和时间来对计算结果进行分析研究，从而更好地掌握各种电路的特性以及电路的基本概念和基本理论。

在分析电路时，必须知道组成电路的各元件的类型，参数，连接关系和支路参考方向等信息。人们通常用观察电路图的方法来获取这些信息，而一般的计算机还不善于识别这种电路图。当用计算机分析电路时，需要将这些信息转换为一组数据，按照一定方式存放在一个矩阵或表格中，供计算机建立电路方程时使用。例如图 3.41 所示电路可以用表 3.1 的一组数据表示。

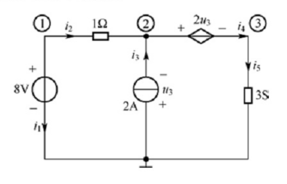


图 3.41　计算机辅助电路分析举例

表 3.1　图 3.41 电路的矩阵转换数据

元件类型	支路编号	开始节点	终止节点	控制支路	元件参数
V	1	1	0		8.0
R	2	1	2		1.0
I	3	0	2		2.0
VV	4	2	3	3	2.0
G	5	3	0		3.0

矩阵中的每一行表示一条支路的有关信息，对于受控源，还要说明控制支路的编号。元件类型用一个或两个大写英文字母表示，例如电压源、电流源、电阻和电导分别 V、I、R、G 表示，电压控制电压源(VCVS)用 VV 表示。支路电压电流的关联参考方向规定为从开始节点指向终止节点。各种元件参数均用主单位表示，即电压用伏特(V)，电流用安培(A)，电阻用欧姆(Ω)，电导用西门子(S)。

当用计算机程序分析电路时，应根据电路图写出这些电路数据，在程序运行时，从键盘将这些数据输入计算机，或者将这些数据先存入到某个数据文件(例如 D.DAT)中，让计算机从这个文件中自动读入这些数据。

3.7.2　电路的表格方程

根据 KCL，KVL 和 VCR，以 b 个支路电压和 b 个支路电流作为未知量建立的一组电路方程，称为 $2b$ 方程，它适用于任何集中参数电路。由 $2b$ 方程导出的支路电流方程，网孔和回路电流方程，以及节点电压方程，减少了未知量，便于手算求解。人们可以根据不同的电路采用不同的方程来分析电路，以减少计算的工作量。而在用计算机分析电路时，从便于建立电路方程和程序的通用性等因素的考虑，常常采用表格方程(Tableau Equation)和改进的节点方程(Modified Node Equation)。从电路课程教学的角度考虑，宜采用表格分析方法，它的优点是：①对电路元件的类型没有限制；②容易建立电路方程；③求解表格方程可直接得到全部节点电压，支路电压电流和吸收功率。表格方程的缺点是方程数目多，这在用计算机分析小规模电路时并不突出。表格方程是以节点电压，支路电压和支路电流作为未知量，用表格或矩阵形式列出的 KCL，KVL 和 VCR 方程。现以图 3.41 电路为例，说明表格方程的建立过程。

(1) 用矩阵形式列出节点①、②、③的 KCL 方程。

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_1\\ i_2\\ i_3\\ i_4\\ i_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

简写为
$$\boldsymbol{AI}=0$$
式中，$\boldsymbol{A}$ 称为关联矩阵，它表示支路与节点的关联关系，其元素为

$$a_{ik}=\begin{cases}1 & \text{如果支路}k\text{离开节点}i\\ -1 & \text{如果支点}k\text{进入节点}i\\ 0 & \text{如果支点}k\text{不与节点}i\text{相连}\end{cases}$$

(2) 用矩阵形式列出支路电压与节点电压关系的 KVL 方程。

$$\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\\ u_4\\ u_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{bmatrix}$$

简写为
$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}$$
其中 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 表示关联矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵。

(3) 以 $mu+ni=u_{\mathrm{S}}$ 形式列出矩阵形式的 VCR 方程。

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\\ u_4\\ u_5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_1\\ i_2\\ i_3\\ i_4\\ i_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\ 0\\ 2\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

简写为
$$\boldsymbol{MU}+\boldsymbol{NI}=\boldsymbol{U}_{\mathrm{S}}$$

(4) 将 KCL，KVL 和 VCR 方程放在一起，得到以下表格方程。

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & \boldsymbol{A}\\ -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & 1 & 0\\ 0 & \boldsymbol{M} & \boldsymbol{N}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{V}\\ \boldsymbol{U}\\ \boldsymbol{I}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \boldsymbol{U}_{\mathrm{S}}\end{bmatrix}$$

简写为
$$\boldsymbol{TW}=\boldsymbol{E}_{\mathrm{S}}$$
式中，$\boldsymbol{T}$ 称为表格矩阵，由于矩阵中大部分系数为零，又称为稀疏表格矩阵。表格方程可用高斯消去法求解，若 $\boldsymbol{T}$ 矩阵的行列式不为零，即 $\det\boldsymbol{T}\neq 0$，则该电路有唯一解。

计算机求解线性代数方程常用的方法是高斯消去法。高斯消去法是用行初等变换的方法将下三角形元素变为零，再用回代方法求出各变量的值。这是数学问题，这里就不做讨论了。

当用计算机来分析电路时，必须有一个电路分析程序，读者可以利用现成的通用电路分析程序，也可以自己动手编制一个电路分析程序。具体程序可参阅其他有关资料或书籍。

3.7.3 PSPICE 程序简介

PSPICE 是由 SPICE 发展而来的用于微机系列的通用电路分析程序。SPICE(Simu 1—ation Program with Integrated Circuit Emphasis)是由美国加州大学伯克莉分校于 1972 年开发的电路仿真程序。随后，版本不断更新，功能不断增强和完善。1988 年 SPICE 被定为美国国家工业标准。目前微机上广泛使用的 PSPICE 是由美国 MicroSim 公司开发并于 1984 年 1 月首次推出的。SPICE 有工业版(Production version)和教学版(Evaluation version)之分，本书介绍 1986 年 8 月推出的 PSPICE6.3 版本(MicroSim Evaluation Version 6.3，即教学版，有时也称为学生版)。它能进行模拟电路分析、数字电路分析和模拟数字混合电路分析。

PSPICE 可以对众多元器件构成的电路进行仿真分析，这些元器件以符号、模型和封装三种形式分别存放在扩展名为.slb、.lib 和.plb 三种类型的库文件中。*.slb 库中的元器件符号用于绘制电路图；*.lib 库中的元器件模型用于电路仿真分析；*.plb 库中的元器件封装形式用于绘制印制电路板的版图。在电路仿真分析中只用到前两个库。

1. PSPICE6.3 运行环境

硬件环境：486 以上的 IBM PC 或兼容机，8MB 以上内存，最好有 80MB 以上硬盘空间(PSPICE6.3 完全安装将占用 63MB 左右的空间)，标准键盘及 VGA 以上显示适配器，鼠标，CD-ROM 驱动器(用于安装 PSPICE)。

软件环境：Windows 3.X、Windows 95 或 Windows NT 3.51 以上。

2. PSPICE 功能简介

PSPICE6.3 可执行的主要分析功能如下。

1) 直流分析

包括电路的静态工作点分析；直流小信号传递函数值分析；直流扫描分析；直流小信号灵敏度分析。在进行静态工作点分析时，电路中的电感全部短路，电容全部开路，分析结果包括电路每一节点的电压值和在此工作点下的有源器件模型参数值。这些结果以文本文件方式输出。

直流小信号传递函数值是电路在直流小信号下的输出变量与输入变量的比值，输入电阻和输出电阻也作为直流解析的一部分被计算出来。进行此项分析时电路中不能有隔直电容。分析结果以文本方式输出。

直流扫描分析可作出各种直流转移特性曲线。输出变量可以是某节点电压或某节点电流，输入变量可以是独立电压源、独立电流源、温度、元器件模型参数和通用(Global)参数(在电路中用户可以自定义的参数)。

直流小信号灵敏度分析是分析电路各元器件参数变化时，对电路特性的影响程度。灵敏度分析结果以归一化的灵敏度值和相对灵敏度形式给出，并以文本方式输出。

2) 交流小信号分析

包括频率响应分析和噪声分析。PSPICE 进行交流分析前，先计算电路的静态工作点，决定电路中所有非线性器件的交流小信号模型参数，然后在用户所指定的频率范围内对电路进行仿真分析。

频率响应分析能够分析传递函数的幅频响应和相频响应，即可以得到：电压增益、电流增益、互阻增益、互导增益、输入阻抗、输出阻抗的频率响应。分析结果均以曲线方式输出。

PSPICE 用于噪声分析时，可计算出每个频率点上的输出噪声电平以及等效的输入噪声电平。噪声电平都以噪声带宽的平方根进行归一化。

3) 瞬态分析

即时域分析，包括电路对不同信号的瞬态响应，时域波形经过快速傅里叶变换(FFT)后，可得到频谱图。通过瞬态分析，也可以得到数字电路时序波形。

另外，PSPICE 可以对电路的输出进行傅里叶分析，得到时域响应的傅里叶分量(直流分量、各次谐波分量、非线性谐波失真系数等)。这些结果以文本方式输出。

4) 蒙特卡罗(Monte Carlo)分析和最坏情况分析

蒙特卡罗分析是分析电路元器件参数在它们各自的容差(容许误差)范围内，以某种分布规律随机变化时电路特性的变化情况，这些特性包括直流、交流或瞬态特性。

最坏情况分析与蒙特卡罗分析都属于统计分析，所不同的是，蒙特卡罗分析是在同一次仿真分析中，参数按指定的统计规律同时发生随机变化；而最坏情况分析则是在最后一次分析时，使各个参数同时按容差范围内各自的最大变化量改变，以得到最坏情况下的电路特性。

下面，用一个实例来说明。

[例 3.20] 直流电路如图 3.42 所示，求节点电压 V(2)。

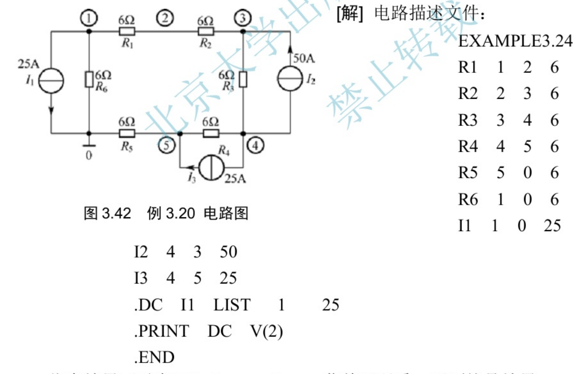


图 3.42　例 3.20 电路图

[解] 电路描述文件：

```
EXAMPLE3.24
R1   1   2   6
R2   2   3   6
R3   3   4   6
R4   4   5   6
R5   5   0   6
R6   1   0   6
I1   1   0   25
I2   4   3   50
I3   4   5   25
.DC   I1   LIST   1   25
.PRINT   DC   V(2)
.END
```

仿真结果可以在 File-Browse Output 菜单下观看。下面就是结果：

```
I1              V(2)
1.000E+00       4.600E+01
2.500E+01      −5.000E+01
```

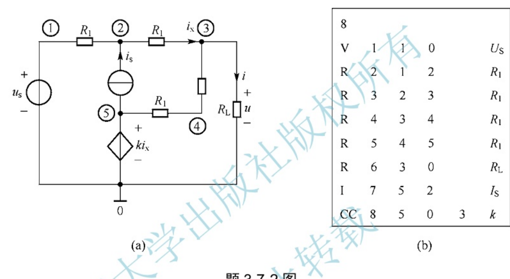
可以看出，当 I1 为 25A 时，节点电压为 V(2)=−50V。

思考与练习

3.7-1　利用计算机进行电路分析有哪些优点？

(利用计算机分析电路，不需要考虑采用哪种分析方法和列出电路方程，也不必花费很多时间去求解电路方程，并检验计算结果是否正确。用计算机辅助电路分析，能够用较少的时间分析更多的更复杂的电路，可以用更多的精力和时间来对计算结果进行分析研究，从而更好地掌握各种电路的特性。)

3.7-2　电路如题 3.7-2(a)图所示，已知 $u_S = 5\text{V}$，$i_S = 1\text{A}$，$R = 1\Omega$，$k = 1$，求当负载电阻 R_L 分别为 0Ω，0.2Ω，0.4Ω，0.6Ω，0.8Ω，1.0Ω 时的电压 u，电流 i 以及所吸收的功率 P。



(a)　　(b)

题 3.7-2 图

参考答案如下：

负载电阻 $R_L(\Omega)$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
电阻电压 u(V)	0	0.72	1.2	1.52	1.8	2
电阻电压 i(A)	0	3.6	3	2.57	2.25	2
吸收功率 P(W)	0	2.59	3.6	3.97	4.05	4

3.8　小　　结

本章介绍了分析线性电路的几种基本方法、非线性电路的分析方法、含集成运算放大器的电路的分析以及计算机辅助分析等方法。

1. 线性电路的分析方法

线性电路分析的基本任务是根据已知电路，求解出电路中电压和电流。电路分析的基本方法是利用 KCL，KVL 和 VCR 建立一组电路方程，并求解得到电压和电流。到目前为止，本书已经介绍了 $2b$ 法，支路电流法，网孔电流法、回路分析法，节点电压法及割集分析法。

1) 支路电流法

对于一个具有b条支路，n个节点的电路，当以支路电压与支路电流为电路变量列出方程时，总计有$2b$个未知量。应用 KCL 可以列出$(n-1)$个独立方程，应用 KVL 可以列出$(b-n+1)$个独立方程，应用各支路的 VCR 又可以列出b个独立方程。总计方程数为$2b$个，与未知数相等。因此，可由$2b$个独立方程解出$2b$个支路电压与支路电流变量。这种方法称为支路法(又称$2b$法)。

为了减少求解的方程数，可以利用元件的 VCR，将b条支路电压用相应的支路电流表示，然后代入 KVL 方程，这样就得到以b个支路电路电流为未知量的b个 KCL 和 KVL 方程。方程数从$2b$减少为b。这种方法称为支路电流法。

2) 网孔电流法

网孔电流法适用于平面电路，其方法是:

(1) 以网孔电流为变量，列出网孔的 KVL 方程(网孔方程)。

(2) 求解网孔方程得到网孔电流，再用 KCL 和 VCR 方程求各支路电流和支路电压。

当电路中含有电流源与电阻并联单口时，应先等效变换为电压源与电阻串联单口。若没有电阻与电流源并联，则应增加电流源电压变量来建立网孔方程，并补充电流源与网孔电流关系的方程。

3) 节点电压法

节点电压法适用于连通电路，其方法是:

(1) 以节点电压为变量，列出节点 KCL 方程(节点方程)。

(2) 求解节点方程得到节点电压，再用 KVL 和 VCR 方程求各支路电压和支路电流。

当电路中含有电压源与电阻串联的单口时，应先等效变换为电流源与电阻并联单口。若没有电阻与电压源串联，则应增加电压源电流变量来建立节点方程，并补充电压源电压与节点电压关系的方程。

4) 回路分析法

网孔电流法仅适用于平面电路，对于非平面电路来说只能用回路法。

回路分析法实际是回路电流分析法，基本回路电流是一组独立的求解变量，以基本回路电流为变量，建立 KVL 方程的方法为回路分析法。

5) 割集分析法

割集分析法与回路分析法一样，是建立在“树”的基础上的一种分析方法。割集分析法是将树支电压作为一组独立的求解变量，根据基本割集建立 KCL 方程，因此割集分析法也可以称为割集电压分析法。割集分析法的选树原则与回路分析法相同，即尽可能将电压源及电压控制量选为树支，电流源及电流控制量选为连支。

2. 非线性电路分析

由电压源、电流源和电阻元件构成的电路，称为电阻电路。由独立电源和线性电阻构成的电阻电路，称为线性电阻电路，否则称为非线性电阻电路。分析非线性电阻电路的基本依据仍然是 KCL、KVL 和元件的 VCR。

电路中存在的非线性电阻元件较少时，图解法是一种有效的方法，只存在一个非线性电阻的电路，非线性电阻元件以外的线性二端网络的外特性和非线性元件的伏安特性的交点就是所求的解。

3. 含理想集成运放的电路分析

含有理想运放的电路的分析有一些特点，按照前面介绍的理想运放的性质可以得到以下两条规则：

(1) 反相输入端和同相输入端的输入电流均为零：$\boxed{i^+ = i^- = 0}$，为“虚断”。

(2) 反相输入端的电压与同相输入端的电压相等：$\boxed{u^+ - u^- = 0}$，为“虚短”。

4. 计算机辅助电路分析

(1) 在进行计算机分析电路的程序时，常常采用表格方程，它是最原始最基本的一种电路约束方程，它适用于任何集中参数电路。

对于 n 个节点，b 条支路的连通电路。其表格方程由 KCL，KVL 和 VCR 方程组成。

(2) 高斯消去法是计算机求解线性代数方程最常用的一种方法。

(3) 现在已经广泛使用各种计算机程序来辅助电路分析和设计。用计算机辅助电路分析的主要工作是将反映电路结构和参数的一组数据，正确地来告诉计算机，计算机能够自动地建立电路方程，并将计算结果输出到屏幕上或文件及打印机中。

(4) 基于数值计算方法的计算机程序，能够对规模很大的电路进行分析计算，求出电路在特定参数下的解答，并以一组数据或曲线的形式输出到文件或打印机中。

(5) 在对电路进行深入地分析和研究时，最好能得到用符号表示电路元件参数的电压电流表达式。基于符号计算方法的计算机程序，能够得到这种表达式，它对分析和设计新电路十分有用。

3.9　习　题

3.9.1　填空题

1. 一个有 n 个节点、b 条支路的电路的图，有__________个独立回路。
2. 一个具有 b 条支路和 n 个节点的平面电路，可编写__________个独立的 KCL 方程和__________个独立的 KVL 方程。
3. 所谓支路电流法就是以__________为未知量，依据__________列出方程式，然后解联立方程得到__________的数值。
4. 网孔电流法是以__________作为电路的独立变量，它仅适用于平面电路。
5. 网孔电流法仅适用于平面电路，回路电流法则无此限制，它不仅适用于__________，而且适用于__________。
6. 根据支路电流法解得的电流为正值时，说明电流的参考方向与实际方向________；电流为负值时，说明电流的参考方向与实际方向__________。
7. 回路电压方程中，自阻总是__________，互阻的正负由__________决定。
8. 列节点电压方程时，先指定一个节点为__________，其余节点与该节点之间的电压称为节点电压。

9. 某支路用支路电流法求解的数值方程组如下：

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$
$$5I_1 - 20I_2 - 20 = 0$$
$$10 + 20I_3 - 10I_2 = 0$$

则该电路的节点数为____________，网孔数为____________。

10. 割集分析法是将____________作为一组独立的求解变量，根据基本割集建立 KCL 方程并求解的电路分析方法。

11. 集成运放内部电路由____________、____________、____________和____________四部分组成。

12. 所谓“理想运放”，是指____________________________________。

13. 非线性电路分析的依据是____________________________________。

3.9.2　选择题

1. 节点法是以(　　)为待求量。
   A. 回路电流　B. 网孔电流　C. 节点电压　D. 支路电流

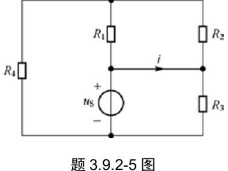
2. 支路电流法是以(　　)为待求量。
   A. 回路电流　B. 网孔电流　C. 节点电压　D. 支路电流

3. 用支路电流法解算电路问题需要列出(　　)个独立方程。
   A. 与支路数相等　B. 支路数加一　C. 与节点数相等　D. 以上答案都不对

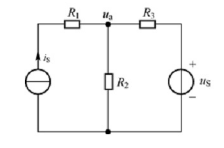
4. 用节点电压法解算电路问题需要列出(　　)个独立方程。
   A. 与支路数相等　B. 节点数减一
   C. 与节点数相等　D. 以上答案都不对

5. 题 3.9.2-5 图所示电路中，已知 $u_S = 10V, R_1 = R_2 = 4\Omega, R_3 = 10\Omega, R_4 = 3\Omega$，图中电流 i 为(　　)。
   A. 0.5A　B. 1.0A　C. 1.5A　D. 2.0A

6. 题 3.9.2-6 图所示电路中，a 点的节点电压 u_a 的方程为(　　)。
   A. $(1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3)u_a = i_S + u_S / R_3$　B. $(1/R_1 + 1/R_2)u_a = i_S + u_S / R_3$
   C. $(1/R_2 + 1/R_3)u_a = i_S + u_S / R_3$　D. $(R_1 + R_2 + R_3)u_a = i_S + u_S / R_3$



题 3.9.2-5 图

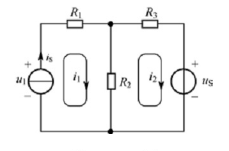


题 3.9.2-6 图

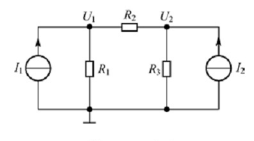
7. 题 3.9.2-7 图所示电路中，回路 1 正确的回路电流方程为(　　)。
   A. $(R_1 + R_2)i_1 - R_2 i_2 = 0$　B. $(R_1 + R_2)i_1 - R_2 i_2 = i_S$
   C. $(R_1 + R_2)i_1 - R_2 i_2 = -u_I$　D. $i_1 = i_S$

8. 如题 3.9.2-8 图所示电阻电路，其 $R_1 = 2\Omega$，$R_2 = 1\Omega$，$R_3 = 1\Omega$，$I_1 = 2\text{A}$，$I_2 = 1\text{A}$。求结点电压 U_1 和 U_2 分别是多少？(　　)

A. 1V；2V　　B. 2.5V；1.5V　　C. 2.5V；1.75V　　D. 2.5V；1V



题 3.9.2-7 图



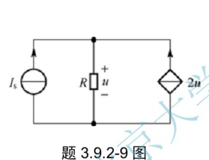
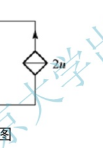
题 3.9.2-8 图

9. 如题 3.9.2-9 图所示电路，其 $R = 2\Omega$，$I_S = 3\text{A}$。求 R 上的电压 u 是多少？(　　)

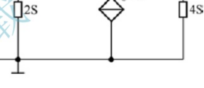
A. 1V　　B. −1V　　C. 2V　　D. −2V

10. 题 3.9.2-10 图所示电路中，已知节点电压方程为 $\begin{cases} 5U_1 - 3U_2 = 2 \\ -U_1 + 5U_2 = 0 \end{cases}$，则 VCCS 的控制系数 $g = ($　　$)$。

A. 1S　　B. −1S　　C. 2S　　D. −2S

题 3.9.2-9 图



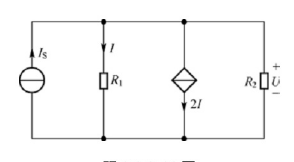
题 3.9.2-10 图

11. 题 3.9.2-11 图所示电路中，已知 $I_S = 5\text{A}$，$R_1 = 8\Omega$，$R_2 = 4\Omega$。由节点分析法可求得 $U = ($　　$)$。

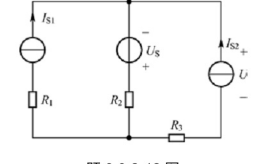
A. 0　　B. 8V　　C. 20V　　D. 40V

12. 题 3.9.2-12 图所示电路中，已知 $U_S = 5\text{V}$，$I_{S1} = 2\text{A}$，$I_{S2} = 1\text{A}$，$R_1 = 3\Omega$，$R_2 = R_3 = 5\Omega$，则 $U = ($　　$)$。

A. 10V　　B. 15V　　C. 20V　　D. 25V



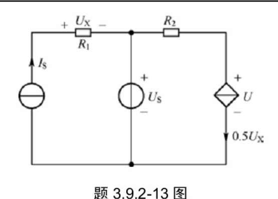
题 3.9.2-11 图



题 3.9.2-12 图

13. 题 3.9.2-13 图所示电路中，已知 $U_S = 3\text{V}$，$I_S = 2\text{A}$，$R_1 = 4\Omega, R_2 = 20\Omega$，则 $U = ($　　$)$。

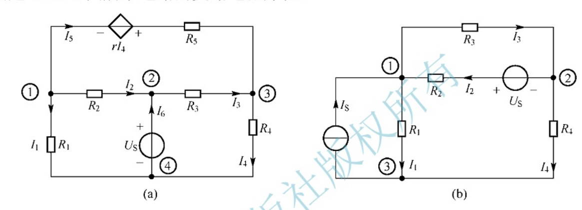
A. −83V　　B. −77V　　C. 77V　　D. 83V



题 3.9.2-13 图

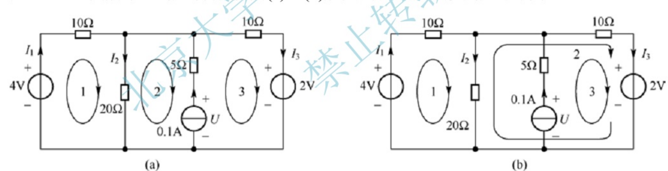
3.9.3　计算题

1. 列出题 3.9.3-1 图所示电路的支路电流方程。



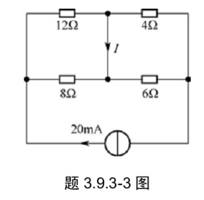
题 3.9.3-1 图

2. 题 3.9.3-2 图所示电路，分别按图(a)、(b)规定的回路列出支路电流方程。

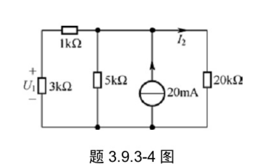


题 3.9.3-2 图

3. 求题 3.9.3-3 图所示电路的支路电流 I。
4. 求题 3.9.3-4 图所示电路的电压 U_1 及电流 I_2。



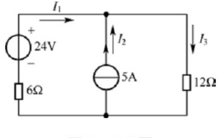
题 3.9.3-3 图



题 3.9.3-4 图

5. 试用支路电流法，求题 3.9.3-5 图电路中的电流 I_3。

6. 如题 3.9.3-6 图所示电阻电路，其中 $R_1 = 3\Omega$，$R_2 = 2\Omega$，$R_3 = 2\Omega$，$U_S = 7V$。求网孔电流 I_1 和 I_2 分别是多少？(要求用网孔分析法)

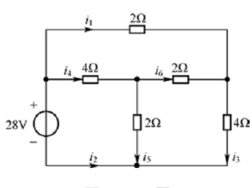


题 3.9.3-5 图

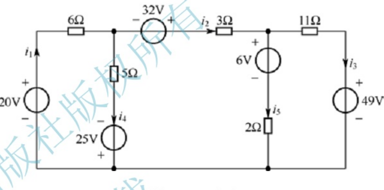
题 3.9.3-6 图

7. 用网孔分析法求题 3.9.3-7 图各支路电流。

8. 用网孔分析法求题 3.9.3-8 图各支路电流。



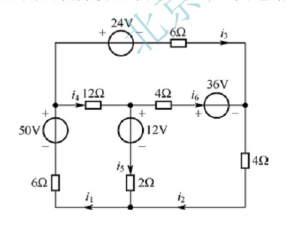
题 3.9.3-7 图



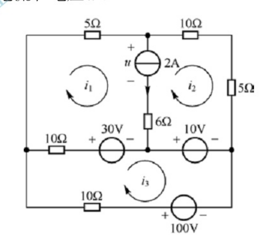
题 3.9.3-8 图

9. 用网孔分析法求题 3.9.3-9 图各支路电流。

10. 用网孔分析法求题 3.9.3-10 图电路中的网孔电流和电压 u。



题 3.9.3-9 图



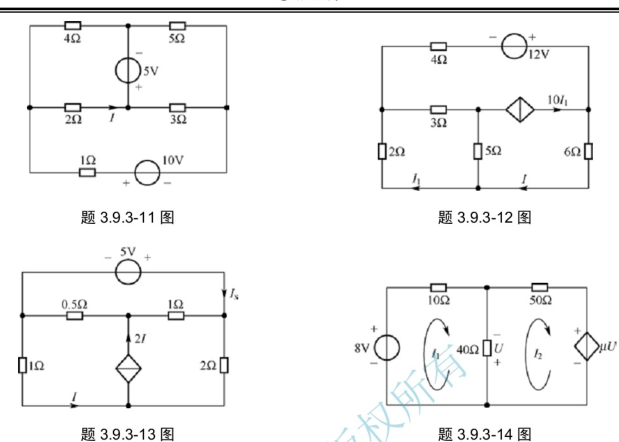
题 3.9.3-10 图

11. 用回路电流法求题 3.9.3-11 图所示电路的电流 I。

12. 用回路电流法求题 3.9.3-12 图所示电路的电流 I。

13. 用回路电流法求题 3.9.3-13 图所示电路的电流 I_x。

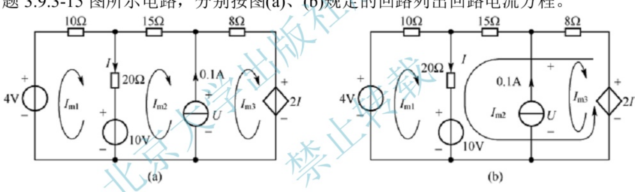
14. 题 3.9.3-14 图所示电路，列出回路电流方程，求 μ 为何值时电路无解。



题 3.9.3-11 图　　题 3.9.3-12 图

题 3.9.3-13 图　　题 3.9.3-14 图

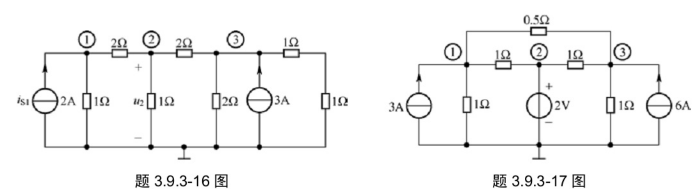
15. 题 3.9.3-15 图所示电路，分别按图(a)、(b)规定的回路列出回路电流方程。



题 3.9.3-15 图

16. 用节点分析法求题 3.9.3-16 图电路的节点电压。

17. 用节点分析法求题 3.9.3-17 图电路的节点电压。



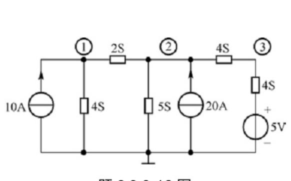
题 3.9.3-16 图　　题 3.9.3-17 图

18. 用节点分析法求题 3.9.3-18 图电路的节点电压。

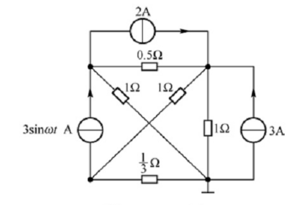
19. 用节点分析法求题 3.9.3-19 图电路的节点电压。

20. 用节点分析法求题 3.9.3-20 图电路的电压 u_1 。

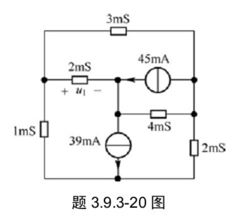
21. 用网孔分析法求题 3.9.3-21 图电路的网孔电流。



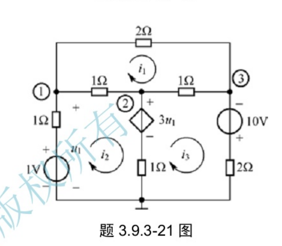
题 3.9.3-18 图



题 3.9.3-19 图

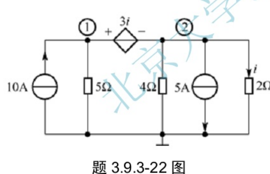


题 3.9.3-20 图

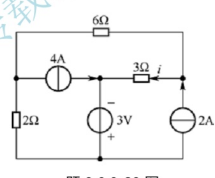


题 3.9.3-21 图

22. 用节点分析法求题 3.9.3-22 图电路的节点电压。
23. 电路如题 3.9.3-23 图所示。试只用一个回路方程求解电流 i 。

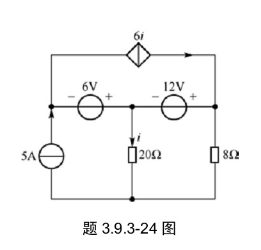


题 3.9.3-22 图

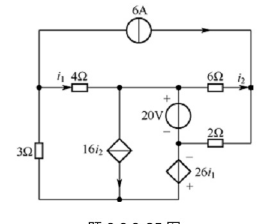


题 3.9.3-23 图

24. 电路如题 3.9.3-24 图所示。试只用一个回路方程求解电流 i 。
25. 电路如题 3.9.3-25 图所示。试分别列出一个回路方程求解 i_1 和 i_2 。

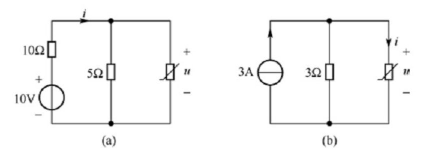


题 3.9.3-24 图



题 3.9.3-25 图

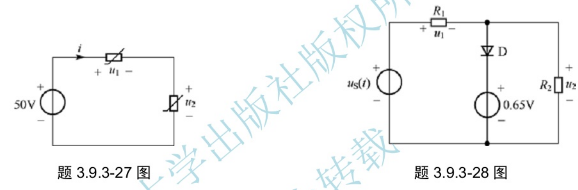
26. 图 3.9.3-26 所示电路中非线性电阻的电压电流特性为$i=1.5u+u^2$。试分别利用曲线相交法和解析法求图中u和i。



题 3.9.3-26 图

27. 题 3.9.3-27 图中两个非线性电阻的 VCR 方程分别为$u_1=1.5u+i^2$和$u_2=3i^2$。试用曲线相交法和曲线相加法求i、u_1和u_2。

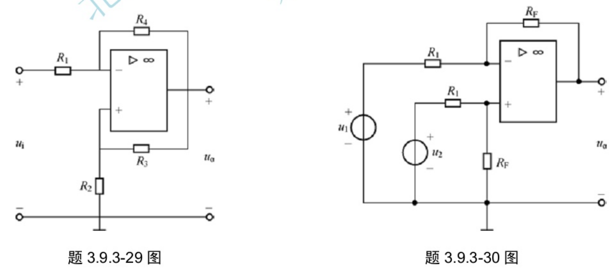
28. 题 3.9.3-28 图所示电路中，$R_1=10\Omega$，$R_2=20\Omega$，$u_S(t)=1\cos1000t\text{V}$。(1)用图解法求$u_1$，$u_2$的波形；(2)若 D 所模拟的二极管烧断了，重求$u_1$，$u_2$的波形。



题 3.9.3-27 图　　　　题 3.9.3-28 图

29. 题 3.9.3-29 图电路中的运放工作于线性区，求转移电压比$k=u_o/u_i$。

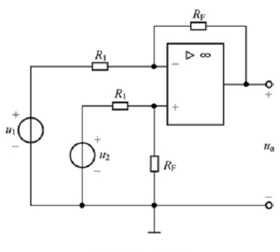
30. 题 3.9.3-30 图电路中的运放工作于线性区，求转移电流比$a=i_2/i_1$。



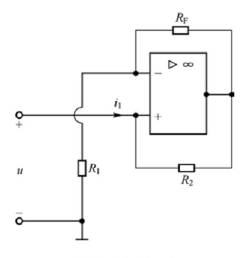
题 3.9.3-29 图　　　　题 3.9.3-30 图

31. 题 3.9.3-31 图电路中的运放工作于线性区，求输出电压u_o的表达式。

32. 题 3.9.3-32 图电路中的运放工作于线性区，求输入电阻$R_i=u/i$。

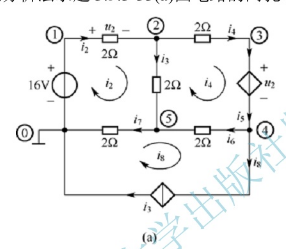


题 3.9.3-31 图

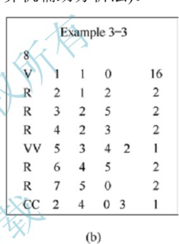


题 3.9.3-32 图

33. 用网孔分析法求题 3.9.3-33(a)图电路的网孔电流(计算机辅助分析法)。



(a)



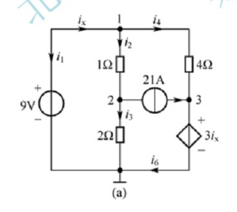
Example 3-3

8					
V	1	1	0		16
R	2	1	2		2
R	3	2	5		2
R	4	2	3		2
VV	5	3	4	2	1
R	6	4	5		2
R	7	5	0		2
CC	2	4	0	3	1

(b)

题 3.9.3-33 图

34. 求题 3.9.3-34(a)图电路的各支路电压电流和功率(计算机辅助分析法)。



(a)

Example 3-4

6					
V	1	1	0		9
R	2	1	2		1
R	3	2	0		2
R	4	1	3		4
I	5	2	3		21
CV	6	3	0	1	−3

(b)

题 3.9.3-34 图

第 4 章　电路分析中的常用定理

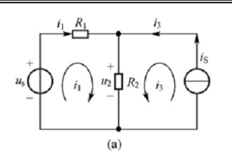
教学提示：一般来说，线性网络的分析方法有两种：一种是以 KCL、KVL 为基础的分析方法，就是前面所学的电路分析的基本方法，如等效变换法、支路电流法、网孔电流法、回路电流法、节点电压法等；另一种是应用电路定理的分析方法。应用电路定理可以将复杂电路化简或将电路的局部用简单电路等效替代，以使电路的计算得到简化。本章介绍电路分析中的几个常用定理，其中包括叠加定理、齐次性定理、替代定理、戴维南定理、诺顿定理、最大功率传输定理、特勒根定理和互易定理，以便进一步了解电路的基本性质，对电路进行简化和分析计算。

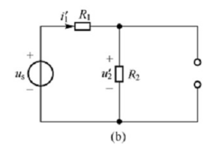
教学要求：通过本章的学习，使学生掌握叠加定理和齐次性定理并会应用其解决电路问题，理解替代定理，掌握戴维南定理、诺顿定理，能够熟练运用电路定理求解线性含源电阻单口网络电路的相关问题，理解负载获得最大功率的条件，了解特勒根定理、互易定理及其应用范围。

4.1　叠加定理和齐次性定理

4.1.1　叠加定理

描述线性电阻电路各电压电流关系的各种电路方程，是一组线性代数方程。例如网孔方程式(3.8)或节点方程式(3.15)，是以网孔电流或节点电压为变量的一组线性代数方程。作为电路输入或激励的独立电源，其 u_S 和 i_S 总是作为已知量出现在这些方程的右边。求解这些电路方程得到的各支路电流和电压(称为输出或响应)是独立电源 u_S 和 i_S 的线性函数。电路响应与激励之间的这种线性关系称为叠加性(或可加性)，它是线性电路的一种基本性质。现以图 4.1(a)所示的双输入电路为例来阐述叠加定理。





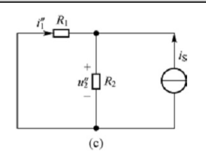


图 4.1　叠加定理举例

列出图 4.1(a)电路的网孔方程：

$$\left.\begin{aligned}(R_1+R_2)i_1+R_2i_3=u_S\\ i_3=i_S\end{aligned}\right\}\tag{4.1}$$



求解式(4.1)可得到电阻 R_1 的电流 i_1 和电阻 R_2 上的电压 u_2

$$i_1 = \frac{1}{R_1 + R_2}u_S + \frac{-R_2}{R_1 + R_2}i_S = i_1' + i_1'' \tag{4.2}$$

式中，$i_1' = i_1\big|_{i_S=0} = \dfrac{1}{R_1 + R_2}u_S$，$i_1'' = i_1\big|_{u_S=0} = \dfrac{-R_2}{R_1 + R_2}i_S$

$$u_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}u_S + \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}i_S = u_2' + u_2'' \tag{4.3}$$

式中，$u_2' = u_2\big|_{i_S=0} = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}u_S$，$u_2'' = u_2\big|_{u_S=0} = \dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2}i_S$

从式(4.2)和式(4.3)可以看到：电流 i_1 和电压 u_2 均由两项相加而成。第一项 i_1' 和 u_2' 是该电路在独立电流源开路($i_S = 0$)时，由独立电压源单独作用所产生的 i_1 和 u_2，如图 4.1(b)所示。第二项 i_1'' 和 u_2'' 是该电路在独立电压源短路($u_S = 0$)时，由独立电流源单独作用所产生的 i_1 和 u_2，如图 4.1(c)所示。上述表明，由两个独立电源共同产生的响应，等于每个独立电源单独作用所产生响应之和。

推广到一般，如果有 m 个电压源、n 个电流源作用于线性电路，那么电路中某条支路的电流 i_j 和电压 u_j 可以表示为

$$i_j = H_{j1}u_{S1} + H_{j2}u_{S2} + \cdots + H_{jm}u_{Sm} + K_{j1}i_{S1} + K_{j2}i_{S2} + \cdots + K_{jn}i_{Sn} \tag{4.4}$$

$$u_j = H_{j1}'u_{S1} + H_{j2}'u_{S2} + \cdots + H_{jm}'u_{Sm} + K_{j1}'i_{S1} + K_{j2}'i_{S2} + \cdots + K_{jn}'i_{Sn} \tag{4.5}$$

式中，$u_{Sk}(k = 1，2，3，\cdots，m)$ 表示电路中独立电压源的电压；$i_{Sl}(l = 1，2，3，\cdots，n)$ 表示电路中独立电流源的电流。$H_{jk}, H_{jk}'(k = 1，2，3，\cdots，m)$ 和 K_{jl}，$K_{jl}'(l = 1，2，3，\cdots，n)$ 是常量，它们取决于电路的参数和输出变量的选择，而与独立电源无关。

例如，对图 4.1 电路中的输出变量 i_1 来说，由式(4.2)可得到

$$H_{11} = \frac{1}{R_1 + R_2} \qquad K_{11} = \frac{-R_2}{R_1 + R_2}$$

对输出变量 u_2 来说，由式(4.3)可得到

$$H_{11}' = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \qquad K_{11}' = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$$

线性电路的这种叠加性被称为叠加定理(superposition theorem)。**叠加定理归纳如下：在多个电源作用的线性电阻电路中，任一支路的电流或电压等于电路中每个独立源单独作用于电路产生的响应的代数和。所谓每一个电源单独作用是指其他独立源变为零(电压源短路，电流源开路)。**

值得注意的是：线性电路中元件的功率并不等于每个独立电源单独产生功率之和。例如在双输入电路中某元件吸收的功率

$$p = ui = (u' + u'')(i' + i'') = u'i' + u'i'' + u''i' + u''i'' \neq u'i' + u''i'' = p_1 + p_2$$

叠加定理可以利用网孔电流法或节点电压法等来证明。关于叠加定理的严格证明可参阅其他教科书。

[例 4.1] 电路如图 4.2(a)所示。

若已知：(1) $u_{S1}=5\text{V}$，$u_{S2}=10\text{V}$；(2) $u_{S1}=10\text{V}$，$u_{S2}=5\text{V}$；(3) $u_{S1}=20\cos\omega t\text{V}$，$u_{S2}=15\sin 2\omega t\text{V}$。试用叠加定理计算电压 u。

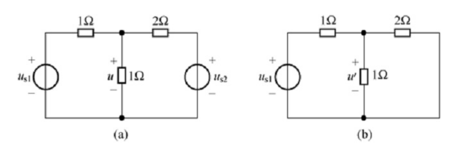
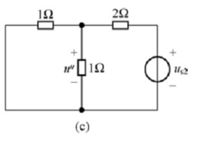



图 4.2　例 4.1 电路图

[解] 画出 u_{S1} 和 u_{S2} 单独作用的电路，如图 4.2(b)和图 4.2(c)所示，分别求出

$$u'=H_1u_{S1}=\frac{2/3}{1+2/3}u_{S1}=0.4u_{S1}$$

$$u''=H_2u_{S2}=\frac{0.5}{2+0.5}u_{S2}=0.2u_{S2}$$

根据叠加定理得

$$u=u'+u''=0.4u_{S1}+0.2u_{S2}$$

代入 u_{S1} 和 u_{S2} 数据，分别得到：

(1) 当 $u_{S1}=5\text{V}$，$u_{S2}=10\text{V}$ 时，$u=4\text{V}$；

(2) 当 $u_{S1}=10\text{V}$，$u_{S2}=5\text{V}$ 时，$u=5\text{V}$；

(3) 当 $u_{S1}=20\cos\omega t\text{V}$，$u_{S2}=15\sin 2\omega t\text{V}$ 时，$u=(8\cos\omega t+3\sin 2\omega t)\text{V}$。

[例 4.2] 电路如图 4.3(a)所示。已知 $r=2\Omega$，试用叠加定理求电流 i 和电压 u。

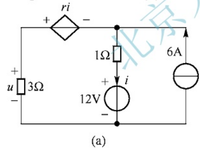
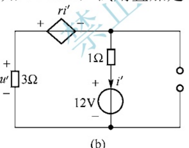
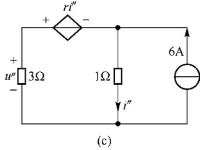




图 4.3　例 4.2 电路图

[解] 画出 12V 独立电压源和 6A 独立电流源单独作用的电路，如图 4.3(b)和图 4.3(c)所示。(注意在每个电路内均保留受控源，但控制量分别改为分电路中的相应量)。由图 4.3(b)电路，列出 KVL 方程

$$2i'+1i'+12\text{V}+3i'=0$$

解得

$$i'=-2\text{A}\qquad u'=-3i'=6\text{V}$$

由图 4.3(c)电路，列出 KVL 方程

$$2i''+1\cdot i''-3\cdot(6-i'')=0$$

解得

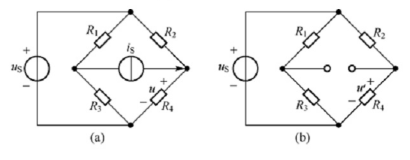
$$i''=3\text{A}\qquad u''=3(6\text{A}-i'')=9\text{V}$$

最后得到

$$i = i' + i'' = -2\text{A} + 3\text{A} = 1\text{A}$$

$$u = u' + u'' = 6\text{V} + 9\text{V} = 15\text{V}$$

[例 4.3] 用叠加定理求图 4.4(a)电路中电压 u。



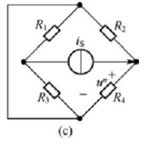


图 4.4　例 4.3 电路图

[解] 画出独立电压源 u_S 和独立电流源 i_S 单独作用的电路，如图 4.4(b)、图 4.4(c)所示。由此分别求得 u' 和 u''，然后根据叠加定理将 u' 和 u'' 相加得到电压 u

$$u' = \frac{R_4}{R_2 + R_4} u_S \qquad u'' = \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} i_S$$

$$u = u' + u'' = \frac{R_4}{R_2 + R_4}(u_S + R_2 i_S)$$

综上，我们在应用叠加定理时应注意以下几点：

(1) 叠加定理适用于线性电路，不适用于非线性电路；

(2) 在叠加的各个分电路中，不起作用的电源应置零，即在电压源处用短路代替，在电流源处用开路代替；

(3) 电路中所有电阻不要变动，受控源要保留；

(4) 叠加时各分电路的电压和电流的参考方向可以取为与原来电路中的相同，也可以相反，取和时应注意各个分量前的“+”、“−”号；

(5) 功率不能叠加。因为电阻消耗的功率 $P = I^2 R = U^2 G$，可见它不是电流(或电压)的一次函数。不过可用叠加定理先求得原电路的电压或电流后，再求功率。

4.1.2　齐次性定理

为了说明线性电路的齐次性(homogeneity)或比例性(proportionality)，下面先从一个简单的示例入手，如图 4.5 所示。从电路结构可以看出，各电流、电压为

$$i_1 = \frac{u_S}{R_1 + \dfrac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}}$$

$$i_2 = i_1 \frac{R_3}{R_2 + R_3} = u_S \frac{R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$

$$u_{R3} = u_{R2} = R_2 i_2$$

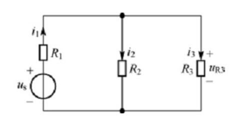


图 4.5　线性电路齐次性举例

可见，i_1、i_2、u_{R3} 与电源电压 u_S 成正比。

任一支路的电流、电压均与电源电压成正比，这一结果具有普遍意义。推广到一般，

如果有 m 个电压源、n 个电流源作用于线性电路，那么电路中某条支路的电流 i_j 或电压 u_j 可以表示为

$$i_j = K_{j1}u_{S1} + K_{j2}u_{S2} + \cdots + K_{jm}u_{Sm} + K_{j(m+1)}i_{S1} + K_{j(m+2)}i_{S2} + \cdots + K_{j(m+n)}i_{Sn} \tag{4.6}$$

$$u_j = K'_{j1}u_{S1} + K'_{j2}u_{S2} + \cdots + K'_{jm}u_{Sm} + K'_{j(m+1)}i_{S1} + K'_{j(m+2)}i_{S2} + \cdots + K'_{j(m+n)}i_{Sn} \tag{4.7}$$

式中，系数 $K_{jl}, K'_{jl}(l = 1,2,\cdots,m+n)$ 取决于电路的参数和结构，与激励源无关。若电路中的电阻均为线性且非时变，则系数 K_{jl}，K'_{jl} 为常数。可见 i_j (或 u_j)与激励源(u_S 和 i_S)成正比。

齐次性定理(homogeneity theorem)归纳如下：当所有独立电源都增大为原来的 k 倍时，各支路的电流或电压也同时增大为原来的 k 倍；如果只是其中一个独立电源增大为原来的 k 倍，则只是由它产生的电流分量或电压分量增大为原来的 k 倍。

齐次性与叠加性是线性电阻电路极其重要的性质。齐次性定理的严格证明可参阅其他教科书。

[例 4.4] 电路如图 4.6 所示。(1) 已知 $I_5 = 1\text{A}$，求各支路电流和电压源电压 U_S；

(2) 若已知 $U_S = 120\text{V}$，再求各支路电流。

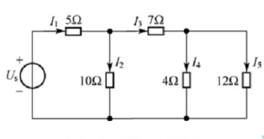


图 4.6　例 4.4 的图

[解] (1) 用 $2b$ 方程，由后向前推算

$$I_4 = \frac{12I_5}{4} = 3\text{A}$$

$$I_3 = I_4 + I_5 = 4\text{A}$$

$$I_2 = \frac{7I_3 + 12I_5}{10} = 4\text{A}$$

$$I_1 = I_2 + I_3 = 8\text{A}$$

$$U_S = 5I_1 + 10I_2 = 80\text{V}$$

(2) 当 $U_S = 120\text{V}$ 时，它是原来电压 80V 的 1.5 倍，根据线性电路齐次性可以断言，该电路中各电压和电流均增加到 1.5 倍，即

$$I_1 = 1.5\times 8\text{A} = 12\text{A} \qquad I_2 = I_3 = 1.5\times 4\text{A} = 6\text{A}$$

$$I_4 = 1.5\times 3\text{A} = 4.5\text{A} \qquad I_5 = 1.5\times 1\text{A} = 1.5\text{A}$$

[例 4.5] 求图 4.7 所示梯形电路的电压 U。

图 4.7　例 4.5 电路图

[解] 利用线性电路的齐次性求解。先假设所求电压 U' 为某值(尽可能使运算简单)，然后计算出电源电压 U'_S 的数值，根据齐次性定理有

$$\frac{U_S}{U} = \frac{U'_S}{U'}$$

由此式便可求得 U_S 作用下的电压 U。

假设 $U' = 2\text{V}$，由图中已知电阻值可得节点③的电压(不是真实值)

$$U'_3 = \frac{3}{2}U' = 3\text{V}$$

节点②的电压

$$U'_2 = \frac{1+6/5}{6/5}U'_3 = \frac{11}{6}U'_3 = \frac{11}{2}\text{V}$$

节点①的电压

$$U_1' = \frac{1+22/21}{22/21}U_2' = \frac{43}{22}U_2' = \frac{43}{4}\text{V}$$

此时的电源电压

$$U_S' = \frac{1+86/85}{86/85}U_1' = \frac{171}{86}U_1' = \frac{171}{8}\text{V}$$

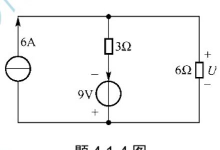
所以

$$U = \frac{U'}{U_S'}U_S = \frac{2\times 8}{171}\times 10\text{V} = 0.936\text{V}$$

需要特别指出的是，齐次性定理与叠加定理是线性电路两个互相独立的性质，不能用叠加定理代替齐次性定理，也不能片面认为齐次性定理是叠加定理的特例。

思考与练习

4.1-1　为什么说由受控源和电阻构成的任何电路，其任一电流和电压值均为零？
(由受控源和电阻构成的任何电路中，受控源的大小是由控制支路的电压与电流控制的，而在由受控源和电阻构成的任何电路中的控制支路的电压与电流均为零，因此受控源也为零，其任意电压和电流均为零。)



题 4.1-4 图

4.1-2　应用叠加定理求单个电源单独作用于电路时，为什么要将其他电源置零(在电压源处短路，在电流源处开路)？
(应用叠加原理求单个电源单独作用于电路时，其他电源不起作用，电压源不起作用，即将其短路，电流源不起作用将其开路。)

4.1-3　请解释不能直接利用叠加定理求解功率的原因。
(因为：$p = ui = (u'+u'')(i'+i'') = u'i' + u''i'' + u'i'' + u''i'$
$= p_1 + p_2 + u'i'' + u''i' \neq p_1 + p_2$
所以，不能用叠加原理求功率。)

4.1-4　用叠加定理求题 4.1-4 图所示电路中的电压 U 。
($u = u'' + u'' = 12 + (-6) - = 6\text{V}$)

4.2　替 代 定 理

替代定理(substitution theorem)是集总参数电路理论中一个重要的定理。从理论上讲，无论线性、非线性、时变、非时变电路，替代定理都是成立的。不过在线性电路分析中替代定理应用更加普遍。这里着重讨论替代定理在线性电路分析中的应用。

电部门，在那里又把电能转换成光能、热能、机械能等其他形式的能而加以利用，完成能量转换的功能。

2) 实现信号的传递与处理的电路

这种作用和功能在自动控制、通信、计算机技术等方面应用广泛。如电视机电路将接收到的电信号经过调谐、滤波、放大等环节的处理，使其成为人们所需要的图像和声音，完成电信号的处理、变换等功能。

1.1.2　电路模型

实际电路在工作时，所涉及的物理量很复杂，为了便于对电路进行分析研究，常将一个实际电路器件用理想元件来表示，所谓的理想电路元件就是在一定条件下忽略实际器件的次要性能，突出其主要性能，将实际器件抽象成有精确数学定义的假想元件。

用理想电路元件构成的电路叫做电路模型(circuit model)。

例如，电灯、电炉等器件通常用电阻元件来表征。电池、发电机等提供电能的实际器件或设备可以用电源元件来表征。

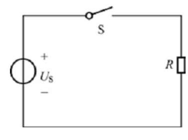


图 1.2　手电筒的电路模型

图 1.2 是手电筒电路的电路模型图，图中 U_S 是一个理想电压源，代替电池；R 是理想电阻元件，只消耗电能，代替灯泡；S 是开关元件；连接三个元件的细实线是理想导线，起着传输电能的作用。

可见，电路模型就是用抽象的理想元件及其组合近似地替代实际器件，从而构成了与实际电路相对应的电路模型。无论简单的还是复杂的实际电路，都可以通过理想化的电路模型充分地进行描述。

需要指出的是：理想电路元件不完全等同于电路器件，而一个电路器件在不同条件下的电路模型也可能不同。例如电炉主要是消耗电能转变为热能，一般用电阻元件表示；但若电路电源频率增大，则电路内的电阻丝产生的磁场能量就不能忽略，其模型就不能只用一个电阻元件表示，还需要包含电感。

当实际电路的尺寸 l 远小于其工作时的最高工作频率所对应的波长 λ 时，即

$$l \ll \lambda$$

式中，$\lambda = c/f$；$c = 3\times10^8\,\mathrm{m/s}$。

此时，可以用“**集总参数元件**”来构建实际器件的模型，每一种集总参数元件只存在一种能量转换关系，即只有电能消耗的元件为电阻，只有电场储能的元件为电容元件，只有磁场储能的元件为电感元件。**一个元件中只存在一种能量转换关系称为集总参数元件(也称为理想电路元件)，由集总参数元件组成的电路称为集总参数电路**(lumped parameter circuit)。

电路理论分析的对象为理想电路元件组成的电路模型，而非实际电路。

电路理论主要是研究电路的电磁现象，用电流、电压等物理量描述其中的物理过程。电路理论是一门研究电路分析与电路设计的基础工程学科。电路分析的任务是根据已知的电路结构和元件参数，在一定的外加电源(称为电路的“激励”)下，求解电路中的电压、电流(也称为电路的“响应”)。电路设计是研究如何构造一个电路，使其满足给定的性能

指标。学习电路分析是为电路设计打基础的。

本书的主要内容是介绍电路的基本定律和定理，并讨论电路的各种计算分析方法，为学习电子信息技术、电气技术、自动化和计算机技术等打下必要的理论基础。



思考与练习

1.1-1　电路一般由哪几部分组成？

1.1-2　电路图中的元件与实际工程中的电路器件有何不同？

1.2　电路的基本物理量

电路分析的任务是对给定的电路确定其电性能，而电路的电性能通常可以通过一组物理量来描述，最常用的便是电流、电压和功率。

1.2.1　电流

1. 电流的定义

带电粒子的定向运动形成电流，为了表征和描述电流的大小，**一般把单位时间内通过导体横截面的电量定义为电流**(electric current)，用符号 $i(t)$ 表示，即

$$\boxed{i(t)=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}} \tag{1.1}$$

习惯上把正电荷运动的方向规定为电流的方向。

如果电流的大小和方向都不随时间变化，这种电流称为恒定电流，或称直流电流(direct current，简写作 dc 或 DC)，一般用大写字母 I 表示。随时间变化的电流简称交流电流(alternating current，简写作 ac 或 AC)，常用英文小写字母 i 表示。

国际单位制中(SI)，电流的单位为安［培］，符号为 A，1 安=1 库/秒，即 1A=1C/s。在通信和计算机技术中常用毫安(mA)、微安(μA)作为电流单位。它们的关系是

$$1\text{A}=10^3\,\text{mA}=10^6\,\mu\text{A}$$

2. 电流参考方向

电流是一个有方向的物理量，在电路分析中，电流的大小和方向是描述电流变量不可缺少的两个方面。但是对于一个给定的电路，要直接给出某一电路元件中电流的真实方向是十分困难的，如交流电路中电流的真实方向经常在改变，即使在直流电路中，要指出复杂电路中某一电路元件电流的真实方向也不是一件很容易的事。在进行电路分析时，为了列写电路方程的需要，常常需要预先假设一个电流方向。**这个预先假设的电流方向叫做参考方向**(reference direction)，参考方向是在电路图中用箭头任意标定的电流方向，如图 1.3 所示。

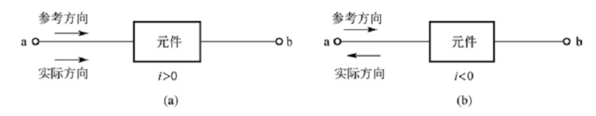


图 1.3　电流的参考方向

电流的参考方向可以任意选定，但一经选定，就不再改变。经过计算若求得 $i>0$ 时，表示电流的实际方向和参考方向一致；$i<0$ 则表示电流的实际方向和参考方向相反。

如图 1.3(a)所示，当 $i=5\text{A}$ 时，表示电流实际方向和参考方向都是从 a $\xrightarrow{\text{流向}}$ b；当 $i=-5\text{A}$ 时，表示电流的实际方向从 b $\xrightarrow{\text{流向}}$ a，如图 1.3(b)所示。

在进行电路分析时，必须先标出电流的参考方向，方能正确进行方程的列写和求解，题目中给出的电流方向均是参考方向。只有规定了参考方向，电流的正负才有意义。

1.2.2　电压

1. 电压的定义

电路中电场力将单位正电荷由 A 点移到 B 点时，失去或得到的能量(或电场力所做的功)称为 A，B 两点间的电位差，也是 A，B 间的电压(voltage)，即

$$\boxed{u=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}q}} \tag{1.2}$$

不随时间变化的电压称为直流电压，其电压用大写 U 表示。交流电压是随时间变化的电压，常用小写字母 u 表示。

电压 u 的单位是伏特，简称伏(V)。常用电压单位还有千伏(kV)、毫伏(mV)、微伏(μA)。它们的关系是

$$1\times10^{-3}\text{kV}=1\text{V}=1\times10^{3}\text{mV}=1\times10^{6}\mu\text{A}$$

2. 电压的参考方向

如同电流标定参考方向一样，在进行电路分析时首先需对电压标定参考方向(也称为参考极性)，如图 1.4 所示，电压的参考方向是在元件或电路的两端用“+”、“−”符号来表示。“+”号表示高电位，“−”号表示低电位。

电压的参考方向可以任意选定，但一经选定，就不再改变。经过计算若求得 $u>0$ 时，表示电压的实际方向和参考方向一致；$u<0$ 则表示电压的实际方向和参考方向相反。另外还可以用双下标表示，例如，u_{ab} 表示 a、b 两点间电压的参考方向是从 a 指向 b 的(a 点高电位，b 点低电位)。

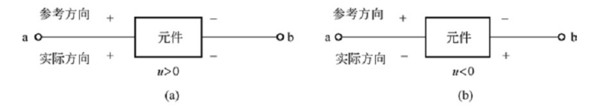


图 1.4　电压的参考方向

3. 关联参考方向

在以后的电路分析中，完全不必先考虑各电流、电压的实际方向究竟如何，而应首先在电路中标定它们的参考方向，然后按参考方向进行计算，由计算结果的正负值与标定的参考方向确定它们的实际方向，图中不需标出实际方向。参考方向可以任意选定，在图中相应位置标注(包括方向和符号)，但一经选定，在分析电路的过程中就不再改变。

为了分析电路方便，常将电压和电流的参考方向选得一致，称其为关联参考方向。

关联参考方向(associated reference direction)：**如果指定流过元件电流的参考方向是从标以电压“+”极流向“−”极性的一端，即两者的参考方向一致，称电压、电流的这种参考方向为关联参考方向；否则称为非关联参考方向。**如图 1.5(a)所示为关联参考方向，图 1.5(b)所示为非关联参考方向。

(a) 电压电流关联参考方向　　(b) 电压电流非关联参考方向

图 1.5　电压电流的关联参考方向与非关联参考方向

4. 电位

为了分析的方便，常在电路中选某一点为参考点，**把任一点到参考点的电压称为该点的电位**(potential)，参考点的电位一般选为零，所以，参考点也称为零电位点。

电位用 v 或 V 表示，单位与电压相同，也是 V(伏)。

[例 1.1] 在图 1.6(a)中，选 c 点为参考点时，已知 $V_a = 30V, V_b = 5V, V_d = -10V$，求：(1) U_{ab}，U_{ad}，U_{bc}；(2)选择 b 点为参考点时，求其他三点的电位值。

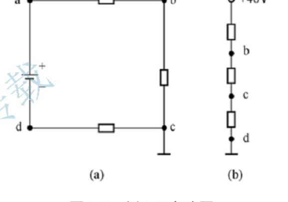


图 1.6　例 1.1 电路图

[解] (1) 图(a)电路中 a 点、b 点间的电压 U_{ab} 是 a 点与 b 点电位之差，电压就是电位差。

所以

$$U_{ab} = V_a - V_b = 30V - 5V = 25V$$

$$U_{ad} = V_a - V_d = 30V - (-10V) = 40V$$

$$U_{bc} = V_b - V_c = 5V - 0V = 5V$$

(2) 若选 b 点为参考点，两点间的电压不变，这是因为无论选择电路中的哪一点作为参考点，都未改变电路的连接关系，因此任意两点间的电压不会改变。当选 b 点为参考点时，根据电位的定义，现在 $V_b = 0$

$$U_{ab} = V_a - V_b$$

因为

$$U_{ab} = 25V$$

$$U_{ab} = V_a - 0 = V_a = 25V$$

$$U_{ad} = V_a - V_d = 40V$$

所以

$$V_d = V_a - 40 = 25V - 40V = -15V$$

$$U_{bc} = V_b - V_c = 0 - V_c = 5V$$

$$V_c = -5V$$

结论：电路中电位参考点可任意选择。当选择不同的电位参考点时，电路中各点电位均不同，电位具有相对性；但任意两点间电压保持不变，电压与参考点的选择无关，具有

唯一性。

在电子电路中，为了电路的简练醒目，对于一端接地(参考点)的电压源常不画出电源的符号，而只在电源的非接地的一端标出其极性及电压值。例如当图 1.6(a)电路选 d 为参考地点时，简化电路图如图 1.6(b)所示。

图 1.7(a)为电子电路的简化电路的习惯画法，图 1.7(b)为图(a)的原电路，参考点 d 是电源的公共端，注意电源的正负极性。

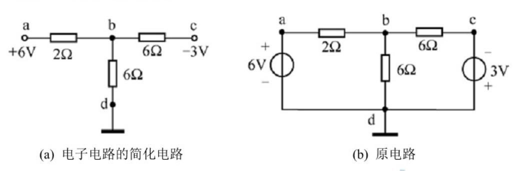


图 1.7　电路与简化电路

1.2.3　功率与能量

1. 功率的定义

电路的基本功能之一是实现能量传输，为了描述和表征电荷和元件交换能量的快慢(速率)，下面引入功率这个物理量。

定义：电场力在单位时间内移动正电荷所做的功称为电功率，简称功率(power)。即

$$\boxed{p(t)=\frac{\mathrm{d}\,w(t)}{\mathrm{d}\,t}} \tag{1.3}$$

由于 $i(t)=\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$， $u(t)=\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}q}$，故电路的功率为

$$\boxed{p(t)=u(t)i(t)} \tag{1.4}$$

对直流电流和直流电压而言，功率记为

$$\boxed{P=UI} \tag{1.5}$$

功率的国际单位是瓦[特](W)，对大功率，采用千瓦(kW)或兆瓦(MW)；对小功率，采用毫瓦(mW)或微瓦(μW)。

$$1\text{MW}=10^3\,\text{kW}=10^6\,\text{W}$$
$$1\text{W}=10^3\,\text{mW}=10^6\,\mu\text{W}$$

2. 功率的计算

如图1.5(a)所示电路 N 的电压 u 和电流 i 取关联参考方向, 故电路消耗的功率为

$$p(t)=u(t)i(t) \tag{1.6}$$

对于图1.5(b)，由于 N 电路的 u 和 i 取非关联参考方向，可将电压或电流视为关联参考方向的负值，此时功率计算公式应该写为

$$p(t)=-u(t)i(t) \tag{1.7}$$

根据电压和电流是否为关联参考方向，可以相应选用式(1.6)或式(1.7)计算功率p：

(1)若 $p>0$，则表示电路N确实消耗(吸收)功率；

(2)若 $p<0$，则表示电路N吸收的功率为负值，实质上它产生(提供或发出)功率。

[例 1.2] 已知图1.5(b)所示电路图中 $i=-4\text{A}$，$u=-6\text{V}$，求其功率。

[解] 因为图1.5(b)中电压电流为非关联参考方向，利用式(1.7)，

$$\begin{aligned} p(t) &= -ui \\ &= -(-6)\times(-4)\,\text{W} = -24\text{W} \end{aligned}$$

计算出功率 $p<0$，表示N提供功率。

注意：计算功率时必须注意电压u和i的参考方向，还需注意公式中各数值的正负号的含义。

[例 1.3] 电路如图1.8(a)所示，方框代表电源或电阻，各电压、电流的参考方向均已设定。已知 $I_1=-2\text{A}$、$I_2=1\text{A}$、$I_3=3\text{A}$，U_1=20V、U_2=−14V、U_3=12V、U_4=−8V、U_5=−2V。试标出各元件的实际方向，并求各元件消耗或向外提供的功率，并验证是否满足功率守恒。

[解] 因为I_2、I_3、U_1、U_3 为正值，所以其实际方向和参考方向一致，而I_1、U_2、U_4、U_5为负值，表明其实际方向与参考方向相反。电路图1.8(b)标出了元件的实际方向，电压也可以用箭头表示极性由“+”指向“−”。

利用图1.8(a)计算各功率

$$P_1=U_1I_1=20\times(-2)\text{W}=-40\text{W}\ (提供)$$

$$P_2=U_2I_2=-14\times1\text{W}=-14\text{W}\ (提供)$$

$$P_3=U_3I_3=12\times3\text{W}=36\text{W}\ (吸收)$$

$$P_4=U_4I_1=(-8)\times(-2)\text{W}=16\text{W}\ (吸收)$$

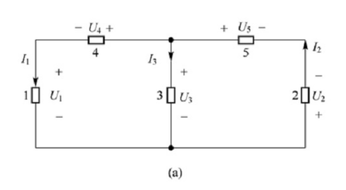
由图1.8(a)知元件5电压与电流参考方向为非关联，元件5的功率为

$$P_5=-U_5I_2=-(-2)\times1\text{W}=2\text{W}\ (吸收)$$

求功率的和有

$$P_1+P_2+P_3+P_4+P_5=0$$

也可以求得提供功率之和等于吸收的功率之和。



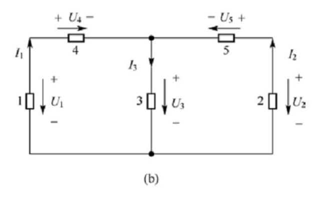


图 1.8　例 1.3 电路图

在电路中，所有的元件功率的代数和为零，也就是在任何时刻元件发出的功率等于吸收的功率，称为功率守恒。

3. 电能

从 t_0 到 t 的时间内，元件吸收(或提供)的电能用 W 表示为

$$W=\int_{t_0}^{t}p\mathrm{d}t=\int_{0}^{t}ui\mathrm{d}t \tag{1.8}$$

单位：焦［耳］，简称焦(J)。它表示功率为1W 的用电设备在1s 时间内所消耗的电能。实用中常用千瓦小时(kW·h)(俗称度)作电能单位，

$$1\text{ 度}=1\mathrm{kW\cdot h}=10^3\mathrm{W}\times 3600\mathrm{s}=3.6\times10^6\mathrm{J}$$

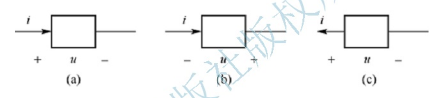
思考与练习

1.2-1　简述对电路中电流、电压设参考方向的意义。

1.2-2　一个 10 kW 的加热器在 30 min 内所消耗的能量是多少？

1.2-3　查找各种家用电器的耗电功率，1200W 烤面包器由 220V 线路取用多少电流？

1.2-4　试计算题 1.2-4 图中各元件吸收或提供的功率。



题 1.2-4 图

图(a)：$u=-2\mathrm{V}, i=1\mathrm{A}$　图(b)：$u=-3\mathrm{V}, i=2\mathrm{A}$

图(c)：$u=10\mathrm{V}, i=5\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{mA}$

(提供 2 W；吸收 6 W；提供 $50\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{mW}$)

1.3　理想电路元件

电路元件是组成电路的最基本单元，它通过端子与外部相连接。按电路元件引出端子数目可分为二端元件、三端元件或四端元件等，还可分为无源元件和有源元件，线性元件和非线性元件，时不变元件和时变元件等。

电路分析中，二端理想电路元件主要有理想电阻元件、理想电感元件、理想电容元件、理想电源。本节将介绍理想电阻元件、理想电压源和电流源，其他元件将在后续章节中讲述。

1.3.1　电阻

1. 电阻元件定义与伏安关系

电路中最简单、最常用的元件是二端电阻元件，电阻元件是耗能的元件。电阻器、灯泡、电炉等在一定条件下可用二端电阻元件作为电路模型。

(1) **定义：若一个二端元件在任意时刻，其两端电压和电流之间的关系可用 $u\sim i$ 平面**

上的一条曲线决定，则此二端元件称电阻元件(resistor)，如图 1.9 所示。

电压的单位是伏(V)，电流的单位是安(A)，电阻元件的电压电流关系称为伏安特性或伏安关系(Voltage Current Relation，VCR)。

根据此定义有如下几种电阻元件。

① 若直线的斜率随时间变化(见图 1.9(a))，则称为线性时变电阻元件。

② 若电阻元件的 VCR 不是线性的(见图 1.9(b))，则称此电阻是非线性电阻元件。

③ VCR 在任意时刻都是通过 $u \sim i$ 平面坐标原点的一条直线，如图 1.9(c)所示，则称该电阻为线性时不变电阻元件，其电阻值为常量，用 R 表示。

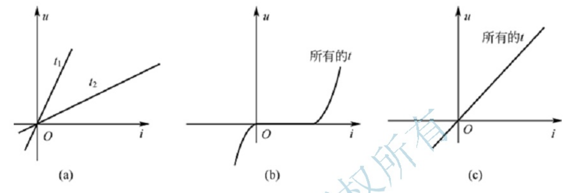


图 1.9　电阻的 $u \sim i$ 曲线图

本书重点讨论线性时不变电阻元件，简称为电阻元件。

可见，线性时不变电阻元件的伏安关系是一条通过原点的直线。R 为该直线的斜率，称为电阻元件的电阻，单位为欧姆，简称“欧”，符号为 Ω，$1\,\Omega = 1\text{V/A}$。线性电阻元件也可以定义为：若电阻 R 值与其工作电压或电流无关，是一个常数，那么这样的电阻元件称为线性电阻元件。图 1.10 为电阻元件的符号。

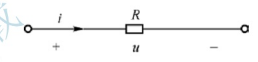


图 1.10　电阻元件符号

(2) 欧姆定律。

线性电阻的电压电流关系满足欧姆定律

$$\boxed{u(t) = Ri(t)} \qquad (u \text{ 和 } i \text{ 为关联参考方向}) \tag{1.9}$$

$$u(t) = -Ri(t) \qquad (u \text{ 和 } i \text{ 为非关联参考方向}) \tag{1.10}$$

式中，u 为电阻两端电压，i 为流过电阻的电流。

(3) 电导(G)。

电阻的倒数定义为电导(conductance)，以符号 G 表示，即

$$G = \frac{1}{R} \tag{1.11}$$

电导的 SI(国际)单位为西［门子］(S)，用电导表征电阻时，欧姆定律为：$i(t) = \pm Gu(t)$。

2. 电阻元件的性质

1) 电阻元件均是无记忆的

由式(1.9)可知，电阻的一个重要特性是在任一时刻，电阻端电压(或电流)由同一时刻的电流(或电压)所决定，而与过去的电压或电流无关。从这个意义上讲，电阻是一种无记忆元件或称即时元件。

2) 开路和短路

线性电阻当 $R=0$ (或 $G=\infty$)时，称为短路，短路时电阻两端电压为零；当 $R=\infty$ (或 $G=0$)时，称为开路，开路时流过电阻的电流为零。

理想导线的电阻值为零。

3) 电阻元件的功率

$$\boxed{p(t)=i^2(t)\cdot R=u^2(t)/R} \tag{1.12}$$

显然若 $R\geqslant 0$，则 $p(t)\geqslant 0$，为耗能元件是无源元件(passive element)，简言之，对所有 t，元件吸收的能量 $w(t)\geqslant 0$，这种元件称为无源元件，即无源元件从不向外电路提供能量。如果二端元件不是无源的，则此元件称为有源元件(active element)，通常我们遇到的电阻，大都属于耗能无源元件。

最后说一下实际电子元件的额定值问题。额定值就是为了保证安全、正常使用用电器具，制造厂家所给出的电压、电流或功率的限制数值。例如，一只灯泡上标明 220V，40W，即说明这样的含义：这只灯泡接电压为 220V，消耗功率为 40W。如果所接电压超过 220V，灯泡消耗功率大于 40W，就有可能将灯泡烧坏(不安全)；如果所接电压低于 220V，灯泡消耗功率小于 40W，会发暗，应用不正常，是大材小用，使用不合理。市售的碳膜、金属膜电阻，除标明电阻值以外，通常还标有 1/8W、1/4W、1/2W 及 2W 各挡额定功率；线绕电阻额定功率较大。在实际设计装配电路时，不但应按所需电阻值大小来选电阻，还应根据电阻在电路中所消耗的功率选择电阻型号。

[例 1.4] 求一只额定功率为 100 W 、额定电压为 220 V 的灯泡的额定电流及电阻值。

[解] 由公式

$$P=UI=\frac{U^2}{R}$$

得

$$I=\frac{P}{U}=\frac{100}{220}\text{A}=0.455\text{A} \qquad R=\frac{U^2}{P}=\frac{220^2}{100}\Omega=484\Omega$$

[例 1.5] 4Ω 电阻上电压与电流为关联参考方向，已知电阻上的电流为 $i=2\sin t\,\text{A}$，求电压 u 、功率 p 以及从 0 到 t 期间电阻吸收的电能(W)。

[解] 因为电压与电流为关联参考方向，利用欧姆定律

$$u=Ri=4\times 2\sin t=8\sin t\ \text{V}$$

功率为

$$p=ui=8\sin t\times 2\sin t=16\sin^2 t\ \text{W}$$

从 0 到 t 期间电阻吸收的电能(W)为

$$\begin{aligned}W&=\int_0^t p\,\mathrm{d}\xi=\int_0^t 16\sin^2\xi\,\mathrm{d}\xi=16\left[\frac{1}{2}\xi-\frac{1}{4}\sin 2\xi\right]_0^t\\&=8t-4\sin 2t\ \ \text{J}\end{aligned}$$

1.3.2　理想电压源

1. 理想电压源的定义

理想电压源是从实际电源抽象出来的一种电路模型，是有源元件。

若一个二端元件接到任何电路后，该元件两端电压总能保持给定的时间函数 $u_S(t)$，与通过它的电流大小无关，则此二端元件称为理想电压源(亦称独立电压源)，简称为电压源(voltage source)。图 1.11 为电压源的符号，图 1.11(a)表示电压源的一般符号，+、−号表示电压源电压的参考极性，u_S 为电压源的端电压值，可以用其表示交流电压源或直流电压源，表示直流电压源时 $u_S=U_S$；也常用图 1.11(b)来表示直流电压源，长线段代表正极，短线段代表负极，U_S 为电压源的端电压值。

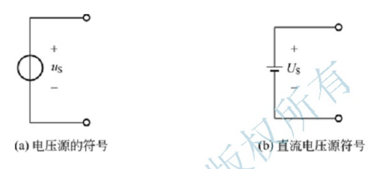


图 1.11　电压源的符号

2. 电压源的性质

电路图 1.12 为理想电压源的伏安特性图(VCR)。

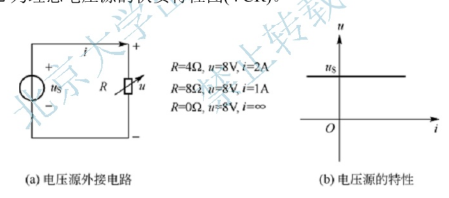


图 1.12　理想直流电压源的特性图

从定义和电压源外接电路图图 1.12 可知，当外接电阻变化时，电压不变，但电流值变化了。可看出它有两个基本性质。

1) 电压不变

其端电压是定值或是一定的时间函数，与流过的电流无关，因此也称为独立电压源，如图 1.12(b)所示，直流电压源的伏安特性为平行于电流轴的直线。

当 $u_S=0$，电压源相当于短路，也就是说一个零值电压源相当于一条短路线。

2) 电流不定

电压源的电压是由它本身决定的，流过它的电流则是任意的，由电压源与外电路共同决定，其端口的电压、电流可表示为

$$u(t)=u_S(t)\qquad i(t)=\text{任意值}$$

3. 电压源的功率

若电压源与外电路连接，电压源自身的电压与电流的参考方向如果为非关联参考方向，可见图 1.12(a)，则电压源功率为

$$P = -u_S i \tag{1.13}$$

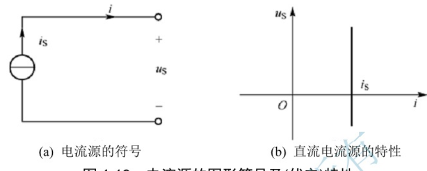
当 $P > 0$ 时，电压源吸收功率，处于充电状态，即负载状态；$P < 0$ 时，电压源提供功率，处于供电状态，即电源状态。

1.3.3　理想电流源

1. 理想电流源的定义

理想电流源也是从实际电源抽象出来的另一种电路模型，是有源元件。

如果一个二端元件的输出电流总能保持给定的电流，与该元件两端电压无关，则称此二端元件为理想电流源，简称为电流源(current source)。其图形符号如图 1.13(a)所示，图中箭头表示电流源电流的参考方向。



(a) 电流源的符号　　(b) 直流电流源的特性

图 1.13　电流源的图形符号及(伏安)特性

当 i_S 为恒定值时，也称为直流电流源 I_S。电流源的伏安特性如图 1.13(b)所示。

2. 电流源的性质

当电流源接上外电路时，如图 1.14 所示。当外接电阻值变化时，输出电流值始终不变，但电压值改变了。

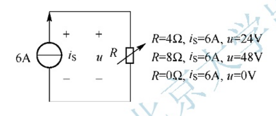


图 1.14　电流源外接电路

电流源的性质如下：

1) 电流不变

电流源发出的电流是定值 I_S 或一定的时间函数 $i_S(t)$，与两端的电压无关，也称独立电流源。当 $i_S(t)=0$，电流源相当于开路。

2) 电压不定

电流源的端电压是由电流源与外电路共同决定的，其端口的电流、电压可表示为

$$i(t)=i_S(t) \qquad u(t)=\text{任意值}$$

3. 电流源的功率

若电流源与外电路连接，电流源自身的电压与电流的参考方向如果为非关联参考方向，可见图 1.14，电流源的功率为

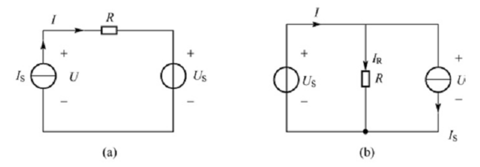
$$P=-ui_S \tag{1.14}$$

当 $P>0$ 时，电流源吸收功率，处于充电状态，即负载状态；$P<0$ 时提供功率，处于供电状态，即电源状态。

思考与练习

1.3-1　欧姆定律有时写为 $u=-Ri$。说明电阻值是负的，对吗？

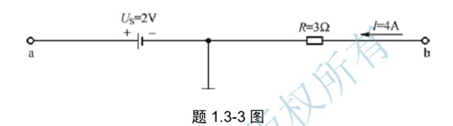
1.3-2　在题 1.3-2 图(a)、(b)中 $I_S = 1A, U_S = 1V, R = 1\Omega$。求各元件吸收的功率。



题 1.3-2 图

(图(a)中，$P_R = 1W$，$P_{U_S} = 1W$，$P_{I_S} = -2W$；(b)中 $P_R = 1W$，$P_{U_S} = -2W$，$P_{I_S} = 1W$)

1.3-3　求题 1.3-3 图所示电路中 V_a，V_b，U_{ab}。($V_a = 2V$，$V_b = 12V$，$U_{ab} = -10V$)



题 1.3-3 图

1.4　基尔霍夫定律

电路是电路元件互连而成的。电路中的各元件的电压、电流受到两类约束。一类是元件本身的伏安关系约束(如电阻元件的欧姆定律)；另一类是电路结构的约束。基尔霍夫定律就是描述后一种约束的基本定律，包括基尔霍夫电流定律(Kirchhoff's Current Law，KCL)和基尔霍夫电压定律(Kirchhoff's Voltage Law，KVL)。它反映了电路中所有支路电压和电流的约束关系，是分析集总参数电路的基本定律。基尔霍夫定律与元件伏安特性构成了电路分析的基础。

1.4.1　电路图的几个名词

1. 支路

一个二端元件称为一条支路(branch)。通常用 b 表示支路数。为了减少支路个数，往往将流过同一电流的几个元件的串联组合作为一条支路，如图 1.15 所示有三个支路，如 a－c－b 为一条支路，同理 a－d－b，a－e－b 为另两条支路。流过支路的电流称为支路电流。

2. 节点

三条或三条以上支路的连接点称为节点(node)。通常用 n 表示节点数。图 1.15 中 a、

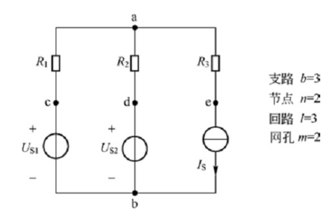


图 1.15　电路名词示意图

b 为节点。



3. 回路

回路(loop)是由支路组成的闭合路径。通常用 l 表示回路。图 1.15 中回路有三个，分别是：a－c－b－d－a， a－d－b－e－a， a－c－b－e－a。

4. 网孔

可以画在一个平面上而不使任何两条支路交叉的电路为平面电路，如图 1.15 所示。

对平面电路，其内部不含任何支路的回路称网孔(mesh)。网孔是回路，但回路不一定是网孔。如图 1.15 中有两个网孔 a－c－b－d－a， a－d－b－e－a。

1.4.2 基尔霍夫电流定律

基尔霍夫电流定律(简称KCL)描述了电路中与节点相连各支路电流之间的相互关系，它是电荷守恒在集总参数电路中的体现。

1. KCL 定律内容

在集总参数电路中，在任一时刻，任一节点上，流出(或流入)该节点的所有支路的电流的代数和为零。若规定流出该节点的电流为正，则流入该节点的电流为负，也可以反之假定，电流是流出节点还是流入节点，是根据电流的参考方向判断的。

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} i_k = 0} \tag{1.15}$$

KCL定律也可以表述为：对于集总参数电路中的任一节点，在任一时刻，流入该节点的电流之和等于流出该节点的电流之和。即

$$\boxed{\sum i_{入} = \sum i_{出}} \tag{1.16}$$

图 1.16 例 1.6 电路图

[例 1.6] 列出图 1.16 的 KCL 方程，如果已知 $i_1 = 5\text{A}$， $i_2 = 7\text{A}$， $i_4 = -1\text{A}$， 求 $i_3 = ?$

[解] 对图 1.16 所示电路节点 a，利用 KCL 定律

$$\sum i = 0$$

流入节点 a 电流的代数和为零，即假定流入电流为正

$$i_1 - i_2 + i_3 - i_4 = 0$$

或流出节点 a 电流的代数和为零，即假定流出电流为正

$$-i_1 + i_2 - i_3 + i_4 = 0$$

或利用 KCL 方程：

$$\sum i_{入} = \sum i_{出} \qquad i_1 + i_3 = i_2 + i_4$$

由上式得

$$i_3 = i_2 + i_4 - i_1 = 7\text{A} + (-1)\text{A} - 5\text{A} = 1\text{A}$$

2. KCL 定律的说明

(1) KCL 实质上是电荷守恒原理在集总电路中的体现，即到达任何节点的电荷既不可能增加，也不可能消失，电流必须连续流动。

(2) 应用 KCL 列写方程时，首先要设出每一支路电流的参考方向，然后根据参考方向取符号：选流出节点的电流取正号则流入电流取负号，如果选流入节点的电流取正号则流出电流取负号，两种选择方法均可以，但在列写的同一个 KCL 方程中取号规则应一致。

(3) 应将 KCL 代数方程中各项前的正负号与电流本身数值的正负号区别开来。

(4) KCL 不仅适用于节点，而且适用于任何一个封闭曲面。对任意的封闭面 S，流入(或流出)封闭面的电流的代数和等于零。

图 1.17 为电子技术中经常使用的晶体管，其内部结构较复杂，但对封闭面来讲，仍符合基尔霍夫电流定律。所以对晶体管有：

$$I_e = I_c + I_b$$

[例 1.7] 图 1.18 中已知 $I_2 = -1\text{A}$，$I_4 = 3\text{A}$，$I_6 = 4\text{A}$。求电流 I_1, I_3, I_5 的值。

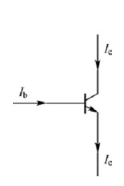


图 1.17　晶体管

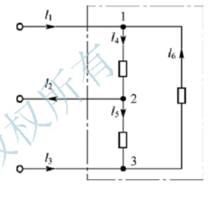


图 1.18　例 1.7 电路图

[解] 对节点 1 有 KCL 方程：$I_1 + I_6 = I_4$，得

$$I_1 = I_4 - I_6 = 3 - 4 = -1\text{A}$$

对封闭面有：$I_1 + I_3 = I_2$，得

$$I_3 = I_2 - I_1 = (-1) - (-1) = 0\text{A}$$

对节点 3 有 KCL 方程　$I_5 + I_3 = I_6$　$I_5 = I_6 = 4\text{A}$

[例 1.8] 在图 1.19 所示电路中，已知 $R_1 = 2\Omega$，$R_2 = 5\Omega$，$U_S = 10\text{V}$。求各支路电流。

[解] 首先设定各支路电流的参考方向如图 1.19 所示，由于 $U_{ab} = U_S = 10\text{V}$，根据欧姆定律，有

$$I_1 = \frac{U_{ab}}{R_1} = \frac{10}{2}\text{A} = 5\text{A}$$

$$I_2 = -\frac{U_{ab}}{R_2} = -\frac{10}{5}\text{A} = -2\text{A}$$

由 KCL，节点 a 的电流方程有

$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

$$I_3 = I_1 - I_2 = 5\text{A} - (-2)\text{A} = 7\text{A}$$

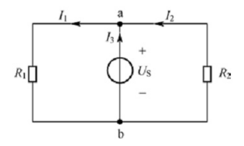


图 1.19　例 1.8 电路图

1.4.3　基尔霍夫电压定律

基尔霍夫电压定律(简称KVL)描述了回路中各支路(元件)电压之间的约束关系，它是能量守恒在集总参数电路中的体现。

1. KVL 定律内容

对于集总参数电路，在任一时刻、沿任一回路绕行一周，各支路(元件)的电压降的代数和为零。

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} u_k = 0} \tag{1.17}$$

KVL 定律也可以表述为：在任意时刻，沿任意回路绕行一周，回路中各元件上的电压升之和等于电压降之和。即

$$\boxed{\sum u_{升} = \sum u_{降}} \tag{1.18}$$

[例 1.9] 在电路图 1.20 中，已知 $u_1 = 1\text{V}, u_3 = -3\text{V}, u_4 = 5\text{V}$，求，$u_2 = ?$

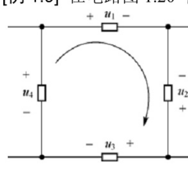


图 1.20　例 1.9 电路图

[解] 应用 KVL 列写回路电压方程，首先要先选定回路的绕行方向。规定元件电压参考方向与绕行方向一致时取正，相反时取负

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 = 0$$

所以

$$u_2 = u_1 + u_3 - u_4 = [1+(-3)-5]\text{V} = -7\text{V}$$

也可以利用式(1.18) $u_2 + u_4 = u_1 + u_3$，同样可以求得 $u_2 = -7\text{V}$。

2. KVL 定律的说明

(1) KVL 实质上是能量守恒原理在集总电路中的体现。因为在任何回路中，实际上是从某一点出发又回到该点时，电位的升高与降低是相等的。

(2) 应用 KVL 列写方程步骤是：首先对回路中各元件电压要规定参考方向；并设定回路的绕行方向，选顺时针绕行和逆时针绕行均可。凡元件电压参考方向(由“+”极到“−”极的方向)与绕行方向相同者取“+”，反之取“−”。

(3) 应将 KVL 代数方程中各项前的正负号与电压本身数值的正负号区别开来。

(4) KVL 可推广应用于开路电路。图1.21中，无闭合回路，可以在a、b之间假设有一假想支路 U_{ab}，与其他元件构成一个假想回路。可以列出下面的KVL方程：

$$-u_1 + u_2 + u_3 - u_4 + u_5 - u_{\text{ab}} = 0$$

$$u_{\text{ab}} = -u_1 + u_2 + u_3 - u_4 + u_5$$

[例 1.10] 电路图如 1.22 所示，求电阻 R_1，R_2 和电压 u_{ed}，u_{bd}。

[解] 在节点 a，利用 KCL

$$I_1 = 5\text{A} + (-4)\text{A} = 1\text{A}$$

在节点 e，利用 KCL

$$I_2 = 1\text{A} + (-4)\text{A} = -3\text{A}$$

在回路 becb 中，利用 KVL 和欧姆定律

$$1 \times R_1 + (-3) \times 3 = 5\text{V} \qquad R_1 = 14\Omega$$

在回路 aecda 中，利用 KVL 和欧姆定律

$$(-4) \times 1 + (-3) \times 3 + 1 \times R_2 + 3 = 0$$

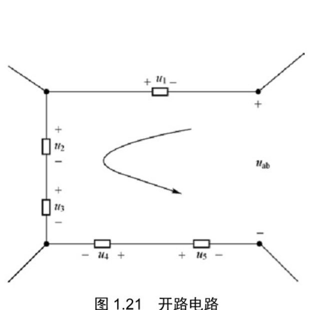


图 1.21　开路电路

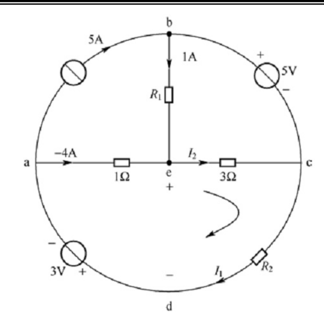


图 1.22　例 1.10 电路图

求得

$$R_2 = 10\Omega$$

在假想回路 ecde 中，利用 KVL 和欧姆定律

$$u_{ed} = (-3)\times 3 + 1\times R_2 = -9\text{V} + 10\text{V} = 1\text{V}$$

$$u_{bd} = 1\times R_1 + u_{ed} = 14\text{V} + 1\text{V} = 15\text{V}$$

u_{ed}、u_{bd} 还有哪些求法？

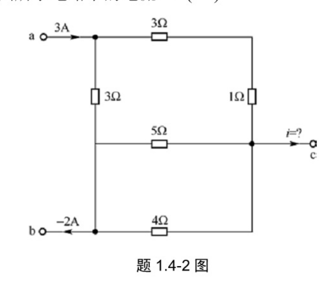
在求解此题中利用了 KCL、KVL 和欧姆定律，它们是电路分析的基本依据。

KCL，KVL 定律与电路支路元件性质无关，只取决于电路的连接结构，这种结构约束称为拓扑约束；欧姆定律取决于支路元件的伏安关系，称为元件约束。利用两类约束可以直接列写电路方程求解电路的各个变量。

思考与练习

1.4-1　说明基尔霍夫定律的应用的条件，应用时应注意的问题。

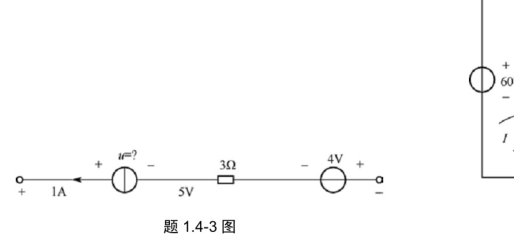
1.4-2　求题 1.4-2 图所示电路中的电流 i 。(5A)



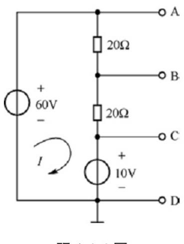
题 1.4-2 图

1.4-3 求题 1.4-3 图所示电路中电流源的端电压 u。(12V)

1.4-4 求题 1.4-4 图所示电路的电位 U_A、U_B、U_C。(60V、35V、10V)



题 1.4-3 图



题 1.4-4 图

1.5 受 控 源

在电子电路中，常会遇到另一种性质的电源，它们有着电源的一些特性，但它们的电压或电流又不像独立电源那样不受电路中其他支路电压、电流影响，而是受电路中某个电压或电流的控制。这种电源称为受控源，也称为非独立源(controlled source or dependent source)。

1.5.1 受控源的定义

所谓的受控源，也是一种电源，其输出电压或电流受电路中其他地方的电压或电流控制，即依靠其他支路的电流或电压向外电路提供电流或电压的元件。

受控源是一种有源元件，是四端元件，由两条支路组成：其中一条支路是控制支路，另一条是被控制支路。被控制支路的电压或电流受控制支路上的电压或电流的控制，是受控的电压源或受控的电流源。

受控源是根据某些电子器件中电压与电流之间存在一定控制与被控制关系的特性建立起来的理想化电路模型。

例如，晶体管的集电极电流受基极电流的控制，在画晶体管的电路模型时就要用到电流控制的电流源。

1.5.2 受控源的分类

受控源就本身的性质而言分为受控电压源和受控电流源两种，依其控制量的性质可分为电压控制受控源和电流控制受控源，控制变量和受控变量的不同组合，将形成四种类型的受控源。

图 1.23 为四种类型的受控源。

(1) 电压控制电压源(VCVS)，其输入控制量为电压 u_1，输出是电压 u_2，$u_2 = \mu u_1$ 式中的控制系数为 μ 是无量纲常数，称为转移电压比，或电压放大倍数。

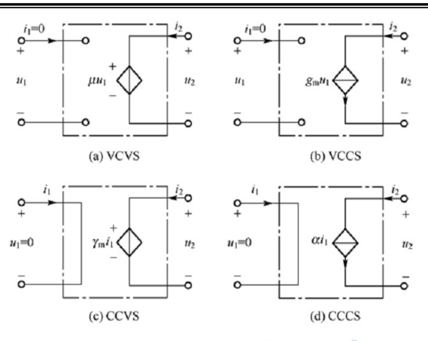


图 1.23　四种受控源

(2) 电压控制电流源(VCCS)，其输入控制量为电压 u_1，输出是电流 i_2， $i_2 = g_m u_1$ 式中的控制系数为 g_m 是电导的量纲，称为转移电导。

(3) 电流控制电压源(CCVS)，其输入控制量为电流 i_1，输出是电压 u_2， $u_2 = \gamma_m i_1$ 式中的控制系数为 γ_m 是电阻的量纲，称为转移电阻。

(4) 电流控制电流源(CCCS)，其输入控制量为电流 i_1，输出是电流 i_2， $i_2 = \alpha i_1$ 式中的控制系数为 α 是无量纲常数，称为转移电流比，或电流放大系数。

图 1.23 中用菱形符号表示受控电压源或受控电流源，以示与独立电源区别。图中 μu_1, $g_m u_1$, $\gamma_m i_1$, αi_1 是受控电源的值，由两部分组成，$\mu, g_m, \gamma_m, \alpha$ 为控制系数，另一部分是控制量，当控制系数为常数时，被控量与控制量成正比。这种受控源就是线性受控源，本书只讨论线性受控源，并将“线性”两字略去，简称受控源。

在表示含有受控源的电路图中，一般不必像图 1.23 所示那样专门标出控制支路及受控支路，而只需在相关支路上标明各控制量(电压或电流)和受控源即可，如图 1.24 所示，图中标出控制量 U，受控电压源为 $6U$。

[例 1.11] 图 1.24 所示电路，求电压 U 和电流 I。

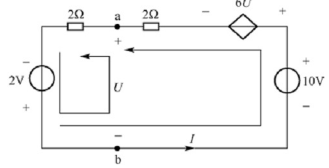


图 1.24　例 1.11 电路图

[解] 在图 1.24 电路中，$6U$ 为电压控制的电压源，可以将其先看做独立电压源，利用 KVL 列方程，在大回路中有

$$4I + 6U - 10 - 2 = 0$$

找出控制量 U 所在位置，对小回路列 KVL 方程则

$$2I - 2 - U = 0$$

联合求解上两式得

$$U = 1\text{V} \qquad I = 1.5\text{A}$$

[例 1.12] 图 1.25(a)电路中，已知 $R_1 = R_2 = 3\Omega$，$R_3 = 60\Omega$，$\alpha = 8$，$u_S = 10\text{mV}$，求电压 u_o。

[解] 图 1.25(a)中的受控源是 CCCS，一般只在电路中画出受控源的符号，标出控制量的位置和方向就可以，图 1.25(b)为简化图，利用图(b)求解较简便。

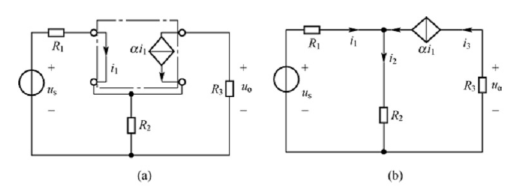


图 1.25　例 1.12 电路图

利用 KCL 知

$$i_1 + i_3 = i_2$$

又因为 $i_3 = \alpha i_1$　$\alpha = 8$，代入上式

$$i_2 = i_1 + i_3 = 9i_1$$

在左边的回路中，利用 KVL 和欧姆定律列方程

$$u_S = R_1 \times i_1 + R_2 \times i_2 = 3i_1 + 3 \times 9i_1 = 30i_1$$

求得

$$i_1 = \frac{1}{3}\text{mA}$$

在右边的回路中

$$u_o = -i_3 R_3 = -\alpha i_1 R_3 = -8 \times \frac{1}{3} \times 60\text{mV} = -160\text{mV}$$

计算结果表明：u_o 的数值比 u_S 大 16 倍，可见由受控源和电阻组成的电路起放大电压作用。

从例题中可知：含受控源的电路仍满足两类约束，在列 KVL、KCL 方程时，一要将受控源暂时当做独立源来列方程；二要找出控制量与求解值的关系，代入列出的方程求得答案。

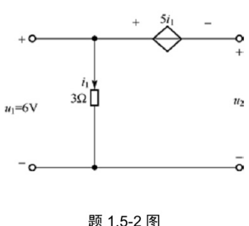
思考与练习

1.5-1　受控源是什么元件？与独立源的区别在哪里？分析含有受控源的电路时如何处理受控源？

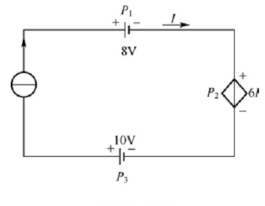
1.5-2　题 1.5-2 图所示电路中，求：电压 u_2。

1.5-3　题 1.5-3 图的电路中，求 $I = -3\text{A}$ 时吸收的功率 P_1，P_2，P_3。

$$(P_1 = -24\text{W}，\ P_2 = 54\text{W}，\ P_3 = 30\text{W})$$



题 1.5-2 图



题 1.5-3 图

1.6　电阻的应用

电阻器是电路元件中应用最广泛的一种，在电子设备中约占元件总数的 30%以上，其质量的好坏对电路工作的稳定性有极大影响。它的主要用途是稳定和调节电路中的电流和电压，其次还作为分流器、分压器和负载使用。

1.6.1　电阻的标识法

1. 标称电阻

电阻产品上标示的阻值，其单位为Ω(欧)，kΩ(千欧)、MΩ(兆欧)，有时还以Ω，k、M代替小数点，例如5.1kΩ表示为5k1；而电阻上标识为2Ω7表示为2.7Ω。

2. 色环标识法

色环电阻使用较广泛，看色环可以读出阻值，使用很方便。色标电阻可分为四环和五环两种标识方法，其中五色标识法常用于精密电阻。带有四个色环的电阻其中第一、二环分别代表阻值的前两位数，第三环代表倍率，第四环代表误差。不同环数和不同颜色都有不同的含义，如表 1.1 所示。

表 1.1　电阻色环颜色所代表的数字或意义

色环颜色	棕	红	橙	黄	绿	蓝	紫	灰	白	黑	金	银	无色
有效数字 第一二色环	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0			
应乘倍数 第三色环	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8	10^9	1	0.1	0.01	
误差(%)											±5	±10	±20

图 1.26 为电阻色环标识法，查表 1.1 可知黄色读数为 4，紫色读数为 7，橙色在第三色环为倍数10^3，所以电阻的读数为$47\times10^3\Omega=47\text{k}\Omega$。

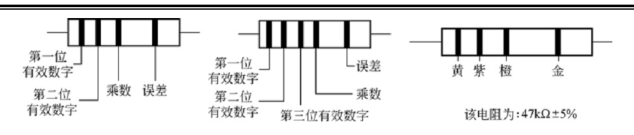


图 1.26 电阻色环标识法

1.6.2 电阻的选用

根据电子设备的技术指标和电路的具体要求选用电阻的型号和误差等级；额定功率应为实际消耗功率的1.5～2倍；根据电路工作频率选择不同类型的电阻，选用电阻除了要考虑阻值、额定功率、最高工作电压外，有时要关心稳定性、噪声电动势及高频特性。图1.27为常用的电阻器。

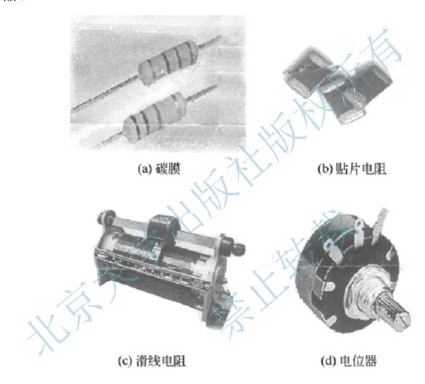


图 1.27 常用的电阻

电阻装接前要测量核对，尤其是要求较高时，还要人工老化处理，提高稳定性。

电阻器的检测方法如下所示。

1. 固定电阻器的检测

将万用表的欧姆挡的两表笔(不分正负)分别与电阻的两端引脚相接即可测出实际电阻值。测试时，特别是在测几十千欧以上阻值的电阻时，手不要触及表笔和电阻的导电部分；被检测的电阻要从电路中焊下来，至少要焊开一个头，以免电路中的其他元件对测试产生影响，造成测量误差；色环电阻的阻值虽然能以色环标志来确定，但在使用时最好还是用万用表测试一下其实际阻值。

2. 电位器的检测

检查开关电位器时，首先要转动旋柄，看看旋柄转动是否平滑，开关是否灵活，开关通、断时“喀哒”声是否清脆，并听一听电位器内部接触点和电阻体摩擦的声音，如有“沙沙”声，说明质量不好。用万用表测试时，先根据被测电位器阻值的大小，选择好万用表的合适电阻挡位，然后可按下述方法进行检测。用万用表的欧姆挡测“1”、“3”两端，其读数应为电位器的标称阻值，如万用表的指针不动或阻值相差很多，则表明该电位器已损坏。

检测电位器的活动臂与电阻片的接触是否良好。用万用表的欧姆挡测“1”、“2”(或“2”、“3”)两端，将电位器的转轴按逆时针方向旋至接近“关”的位置，这时电阻值越小越好。再顺时针慢慢旋转轴柄，电阻值应逐渐增大，表头中的指针应平稳移动。当轴柄旋至极端位置“3”时，阻值应接近电位器的标称值。如万用表的指针在电位器的轴柄转动过程中有跳动现象，说明活动触点有接触不良的故障。

3. 压敏电阻的检测

用万用表的 R×1k 挡测量压敏电阻两引脚之间的正、反向绝缘电阻，均为无穷大，否则，说明漏电流大。若所测电阻很小，说明压敏电阻已损坏，不能使用。

4. 光敏电阻的检测

用一黑纸片将光敏电阻的透光窗口遮住，此时万用表的指针基本保持不动，阻值接近无穷大。此值越大说明光敏电阻性能越好。若此值很小或接近为零，说明光敏电阻已烧穿损坏，不能再继续使用。

将一光源对准光敏电阻的透光窗口，此时万用表的指针应有较大幅度的摆动，阻值明显减小。此值越小说明光敏电阻性能越好。若此值很大甚至无穷大，表明光敏电阻内部开路损坏，也不能再继续使用。

电阻的具体种类很多，选用时要注意具体使用要求。

1.7 小　　结

1. 电路模型

若将实际电路中各实际部件都用它们的模型表示，这样所画出的图称为电路模型图。电路理论研究的对象是电路模型，简称为电路。

2. 电路中的基本变量：电流、电压、功率

(1) $i = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$ 表示电流，单位为安(A)。首先要标注电流的参考方向，否则电流的正负值没有意义。

(2) 电位之差称电压。即 $u = \mathrm{d}w/\mathrm{d}q$，单位为伏(V)；电压的实际方向总是从高电位指向低电位的方向，即电位降落的方向。分析电路，首先要标注电压的参考方向(极性)，否则电压的正负值没有意义。

(3) 在电路中任选一个参考节点，叫做零电位点。电路中从其他节点到参考节点的电压，称为该节点的电位。

(4) 某个电路元件上电压和电流的参考方向可以各自假定，但为了方便，电压和电流常采用一致的参考方向，称为关联参考方向。

(5) 做功的速率称功率，即 $p = \mathrm{d}w/\mathrm{d}t$，单位为瓦(W)。某个电路元件的功率定义为 $p = u \cdot i$(关联参考方向)或 $p = -u \cdot i$(非关联参考方向)。

3. 电路的理想元件

(1) 线性电阻满足欧姆定律 $u = Ri$。

(2) 电压源的电压是一特定时间函数 $u_S(t)$，与流过的电流大小、方向无关；流过电压源的电流由 $u_S(t)$ 和外电路共同确定。

(3) 电流源的电流是一个特定时间函数 $i_S(t)$，与其端电压的方向、大小无关；电流源的端电压由 $i_S(t)$ 和外电路共同确定。

(4) 受控源是一种电源，其输出电压或电流受电路中其他地方的电压或电流控制。受控源分为四种类型的受控源。电压控制电压源，简称 VCVS；电压控制电流源，简称 VCCS；电流控制电压源，简称 CCVS；电流控制电流源，简称 CCCS。

4. 电路的基本定律主要是：基尔霍夫定律和欧姆定律

(1) 基尔霍夫电流定律(KCL)为：在集总参数电路中，任一时刻，任一节点上，流出任一节点或封闭面的全部支路电流的代数和等于零。

$$\sum_{k=1}^{n} i_k = 0$$

(2) 基尔霍夫电压定律(KVL)陈述为：在任一时刻、沿任一回路绕行一周，各支路(元件)的电压降的代数和为零。

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = 0$$

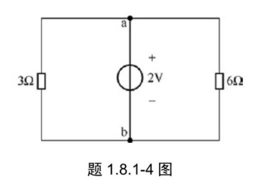
(3) 任何集总参数电路的电压电流都要受 KCL、KVL 和 VCR 方程的约束。直接反映这些约束关系的方程是最基本的电路方程，它们是分析电路的基本依据。

1.8 习　　题

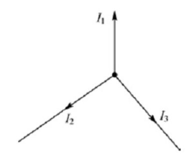
1.8.1 填空题

1. 在电路模型中白炽灯泡常用____________元件表示。
2. 电路中电压、电流值的正、负与假定的参考方向(正方向)____________。
3. 任意两点之间的电位差都与零参考点的位置____________。
4. 题 1.8.1-4 图所示电路中电压源提供的功率____________。
5. 理想电压源的内阻等于____________；理想电流源的内阻等于____________。

6. 如果电阻元件上电压 U、电流 I 的为非关联参考方向，则欧姆定律可表示为__________。
7. 电路分析中常用的基本定律是__________和__________。
8. 题 1.8.1-8 图所示电路中 $I_1 = 2\text{A}$， $I_2 = -5\text{A}$ 则 $I_3 =$__________。

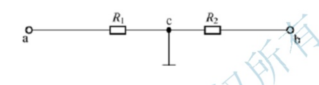


题 1.8.1-4 图



题 1.8.1-8 图

9. 题 1.8.1-9 图所示电路，已知 $V_a = 40\text{V}$, $V_b = -10\text{V}$, 则 $U_{ba} =$__________。

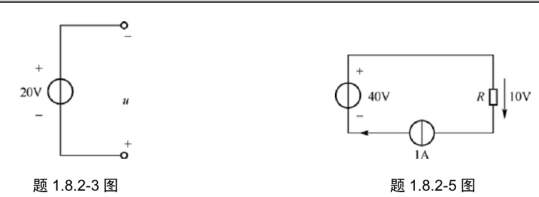


题 1.8.1-9 图

10. 基尔霍夫电流定律(KCL)可表述为：电路任一节点，在任一时刻流入该节点的________为零。基尔霍夫电压定律(KVL)可表述为：电路中任一回路，在任一时刻，沿回路的________为零。

1.8.2　选择题

1. 有一个100Ω， 1W 的碳膜电阻使用于直流电路，使用时电流不能超过(　　)。
   A. 10mA　　B. 100mA　　C. 1mA　　D. 0.01mA
2. 在由理想电压源直接供电的负载 A 两端并联负载 B，则负载 A 上的电压(　　)。
   A. 变大　　B. 变小　　C. 不变　　D. 不确定
3. 电路如题 1.8.2-3 图所示，电压 $u =$ (　　)。
   A. −20V　　B. 20V　　C. 0V　　D. 不确定
4. 电路中任一点的电位大小与(　　)有关。
   A. 电源电压　　B. 回路　　C. 支路数　　D. 参考点
5. 电路如题 1.8.2-5 图所示，电路中输出功率的元件是(　　)。
   A. 仅是电压源　　B. 仅是电流源
   C. 电压源和电流源都产生功率　　D. 没有



题 1.8.2-3 图　　　　题 1.8.2-5 图

6. 两个并联电阻的功率相同，它们的电阻值(　　)。

A. 不同　　B. 相同　　C. 不确定



7. 基尔霍夫电流定律(KCL)是说明(　　)之间关系的定律。

A. 电路中所在支路电流　　B. 同一回路中各支路电流

C. 接于同一节点的各支路电流　　D. 同一网孔中各支路电流

8. 基尔霍夫电压定律(KVL)是说明(　　)之间关系的定律。

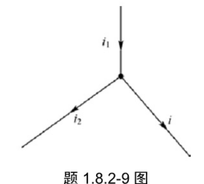
A. 电路中所在元件端电压　　B. 闭合回路中各元件电压

C. 接于同一节点的元件电压

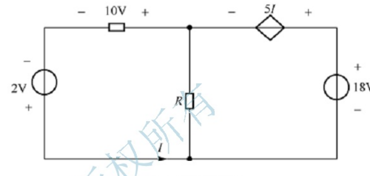
9. 题 1.8.2-9 图所示电路中 $i_1 = e^{-2t}$A, $i_2 = \cos t$A 则 i =(　　)。

A. e^{-2t}　　B. $\cos t$A　　C. $e^{-2t} + \cos t$A　　D. $e^{-2t} - \cos t$A

10. 题 1.8.2-10 图所示电路中，受控源的类型是(　　)，受控源两端的电压是(　　)。



题 1.8.2-9 图



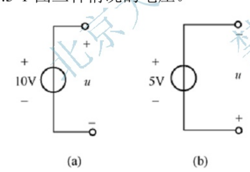
题 1.8.2-10 图

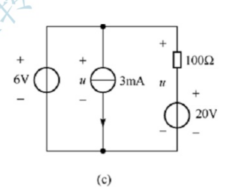
A. CCCS，10V　　B. CCVS，不确定

C. CCVS，10V　　D. CCVS，30V

1.8.3　计算题

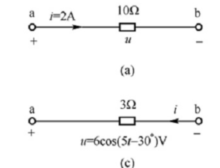
1. 求题 1.8.3-1 图三种情况的电压。

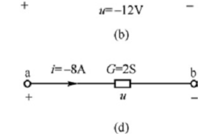




题 1.8.3-1 图

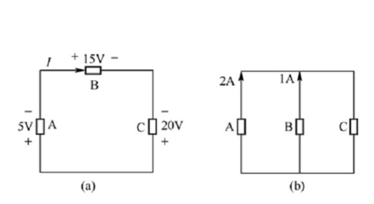
2. 求题 1.8.3-2 图所示电路中的 u 或 R 或 i。





题 1.8.3-2 图

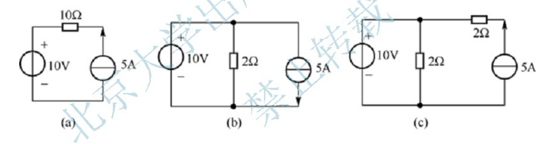
3. 题 1.8.3-3(a)图所示电路中，已知元件 C 提供的功率是 20W，问：电路电流 I 、元件 A、B 的功率是多少？判断它们是吸收还是提供功率。图 1.8.3-3(b)已知元件 A 提供的功率是 36W，问：元件 B、C 的功率是多少？判断它们是吸收还是提供功率。
4. 某个支路电压与电流为关联参考方向，波形图如题 1.8.3-4 图所示。分别画出其功率和能量的波形。



题 1.8.3-3 图

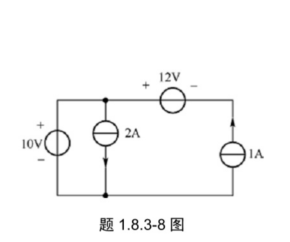
题 1.8.3-4 图

5. 某车间有 12 只“220V 、60W ”的照明灯和 20 把“220V 、45W ”的电烙铁，平均每天使用 8h，问每月(按 30 天计算)该车间用电多少 kW • h？
6. 4.5A • h(安 • 小时)，1.5V 手电筒电池提供电流为 100mA，该电池能维持多久？
7. 计算题 1.8.3-7 图中各元件上的电流、电压和功率，并校核功率平衡关系。

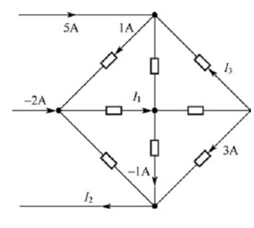


题 1.8.3-7 图

8. 电路如题 1.8.3-8 图所示，计算各电源功率，并说明是提供功率还是吸收功率。
9. 电路如题 1.8.3-9 图所示，求电流 I_1， I_2，能求得 I_3 的值吗？

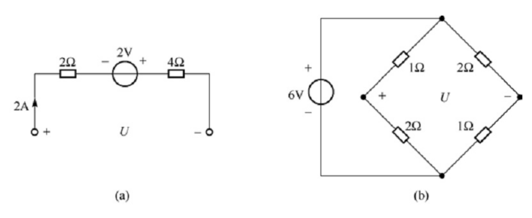


题 1.8.3-8 图



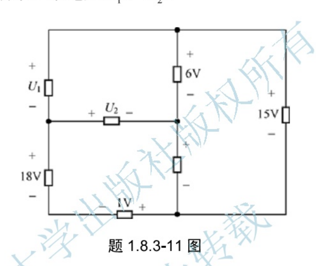
题 1.8.3-9 图

10. 求题 1.8.3-10 图所示电路的电压 U 。



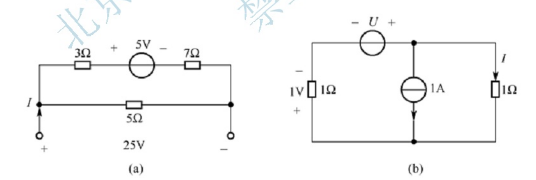
题 1.8.3-10 图

11. 电路如题 1.8.3-11 图所示，求电压 U_1， U_2。



题 1.8.3-11 图

12. 求题 1.8.3-12 图所示电路的电流 I 。

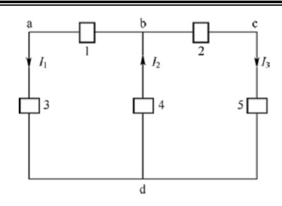


题 1.8.3-12 图

13. 电路如题 1.8.3-13 图所示，各方框泛指元件，已知 $I_1=3\text{A}$， $I_3=-2\text{A}$， $V_a=10\text{V}$， $V_b=8\text{V}$， $V_d=-3\text{V}$：

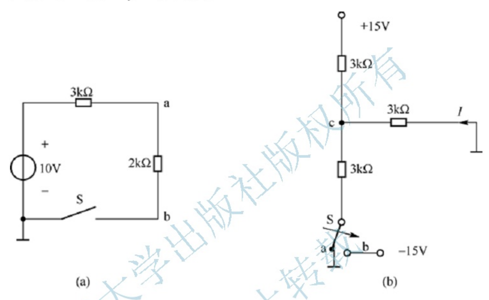
(1) 欲验证 I_1,I_3 数值是否正确，问电流表在图中应如何连接？并标明电流表极性。

(2) 求 U_{ab},U_{da}， 若要测量这两个电压，问电压表如何连接？并标明电压表极性。



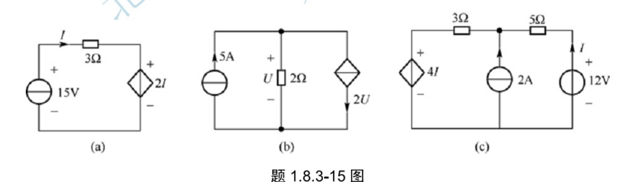
题 1.8.3-13 图

14. 题 1.8.3-14 图所示直流电路，计算图(a)开关 S 打开和闭合时的 V_a，V_b，U_{ab}。图(b)开关 S 分别接到 a,b 点时，电位 V_c, I 各为多少？



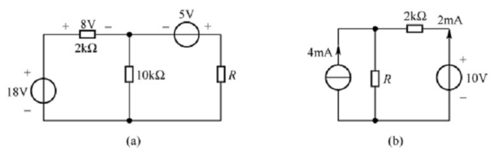
题 1.8.3-14 图

15. 求题 1.8.3-15 图电路图(a)、(c)中的电流 I，图(b)中的电压 U。



题 1.8.3-15 图

16. 电路如题 1.8.3-16 图所示，求未知电阻 R。



题 1.8.3-16 图

第 2 章　二端网络的等效

教学提示：等效变换是分析线性电阻电路的一种重要的方法，其中心思想就是将电路中的某一部分用其简单的等效电路来替代，如电路 N_1 和电路 N_2 有完全相同的伏安特性，则称电路 N_1 和电路 N_2 互为等效电路，利用等效变换可以简化电路的分析与计算。

教学要求：本章主要讨论电路等效的概念及各种电路的等效化简方法，重点是电阻的串、并联化简及性质；独立电源、受控源的串并联及简化等效电路。

2.1　二端电路等效的概念

二端网络(单口网络)的概念在电路分析中经常用到，本节介绍二端网络概念后将讨论二端网络的等效定义、等效的条件、等效的目的。

2.1.1　二端电路

由线性电阻、线性受控源和独立电源组成的电路称为线性电阻电路，简称电阻电路。具有两个端子的电阻电路称为二端网络电路或含源单口网络(one-port network)，常用符号 N 表示，如图 2.1 所示。

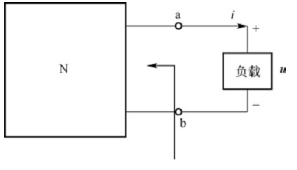


图 2.1　含源单口网络

分析线性电阻电路的方法很多，基本依据都是基尔霍夫的两个定律及元件的伏安关系。等效变换是分析线性电阻电路的一个重要的方法，其中心思想就是将电路中的某一复杂部分用其简单的等效电路来替代。

2.1.2　电路等效的概念

如果电路 N_1 和电路 N_2 具有完全相同的端口伏安关系，则称 N_1 和 N_2 互为等效电路 (equivalent circuit)。电路 N_1 和 N_2 的内部结构和元件参数可以完全不同，但对端口以外的电路而言，不论接入的是电路 N_1 还是 N_2，外电路的电压、电流不会改变，即对外电路是等效的。

如图 2.2 所示。互为等效的两部分电路 N_1 与 N_2 在电路中可以相互替换，也就是说利用图 2.2(a)求出 F 中的电流、电压、功率与利用图 2.2(b)求出 F 中的电流、电压、功率是

一样的。常将图 2.2(a)与图 2.2(b)称为互为等效电路。

电路等效变换的条件是相互代换的两部分电路具有相同 VCR；电路等效的对象是 F(也就是电路未变化的部分)中的电流、电压、功率；电路等效变换的目的是为了简化电路，可以方便地求出需要求得的结果。

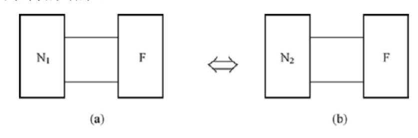


图 2.2　电路等效示意图

思考与练习

2.1-1　何谓电路等效？两电路等效需满足什么条件？

2.1-2　电路中某一部分被等效变换后，未被等效部分的________与________仍然保持不变。即电路的等效变换实质是________等效。

2.2　电阻的串、并、混联及等效电阻

在电路中，电阻元件不止一个，根据不同需要按一定方式连接，首先分析简单的电阻的串联、并联、混联电路，然后分析电阻的星形连接与三角形连接的等效变换，求出等效电阻后可以使电路计算简单化。

2.2.1　电阻的串联

1. 串联等效电阻

图 2.3(a)所示由两个电阻串联(series connection)组成的电路，特点是电路没有分支，通过两个电阻的电流相同。用 u 和 i 分别表示电路的端口电压、电路电流。

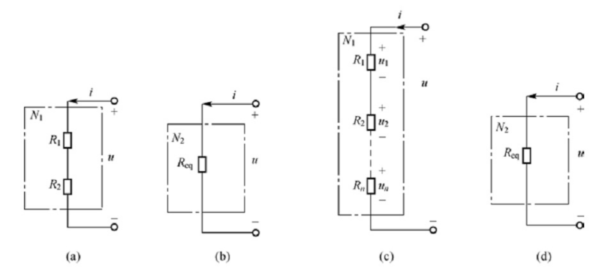


图 2.3　电阻的串联



根据 KVL 和欧姆定律有：

$$u = u_1 + u_2 = R_1 i + R_2 i = (R_1 + R_2)i$$

$$\frac{u}{i} = R_{eq} = R_1 + R_2 = \sum_{k=1}^{n} R_k \quad (k = 1,\ 2) \tag{2.1}$$

式中，R_{eq} 称为串联电阻的等效电阻如图 2.3(b)所示，从式(2.1)中可以看出：电阻串联，其等效电阻等于相串联各电阻之和。这个结论对多个电阻串联如 n 个电阻串联也成立，如图 2.3(c)所示，等效电路如图 2.3(d)所示。

$$R_{eq} = \frac{u}{i} = R_1 + R_2 + \cdots R_k + \cdots R_n = \sum_{k=1}^{n} R_k \quad (k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{2.2}$$

2. 串联电阻的分压公式

电阻串联时，各串联电阻的电压为

$$\boxed{u_k = R_k i = R_k \frac{u}{R_{eq}} = \frac{R_k}{R_{eq}} u} \qquad (k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{2.3}$$

表明各个串联电阻上的电压与其电阻值成正比，即电阻值越大分得的电压越大。式(2.3)为分压公式。利用式(2.3)时，需注意各电压的参考方向。

3. 串联电路的功率关系

串联电阻电路的功率

$$p = ui = (R_1 + R_2 + \cdots + R_n)i \cdot i = R_1 i^2 + R_2 i^2 + \cdots + R_n i^2 = \sum_{k=1}^{n} R_k i^2 = R_{eq} i^2 \tag{2.4}$$

式(2.4)表明，多个串联电阻吸收的功率是各个电阻吸收的功率之和，即等于等效电阻吸收的功率。

2.2.2　电阻的并联

1. 并联等效电阻

图 2.4(a)是两个电阻并联(parallel connection)的电路，其特点是：电阻 R_1和R_2 的两端电压相等。利用 KCL 和欧姆定律可以求得总电流 i 和各电阻的电流的关系

$$i = i_1 + i_2 = \frac{u}{R_1} + \frac{u}{R_2} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) u$$

因为 $G_1 = \dfrac{1}{R_1}$，$G_2 = \dfrac{1}{R_2}$，所以有

$$\frac{i}{u} = G_{eq} = (G_1 + G_2) \tag{2.5a}$$

或

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \tag{2.5b}$$

由式(2.5b)推得两个电阻并联的等效电阻为

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{2.6}$$

G_{eq} 称为等效电导，图 2.4(a)可以等效为图 2.4(b)。

可以得出结论：电阻并联，其等效电导为各个电导之和，而等效电阻的倒数等于相并联的各电阻倒数之和。

式(2.5)适用于多个电阻并联的情况(如图 2.4(c)、(d)所示)。

$$G_{eq}=\frac{i}{u}=G_1+G_2+\cdots+G_k+\cdots G_n=\sum_{k=1}^{n}G_k \tag{2.7}$$

$$\frac{1}{R_{eq}}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\cdots+\frac{1}{R_k}+\cdots+\frac{1}{R_n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{R_k}$$

图 2.4　电阻的并联

2. 并联电阻的分流公式

电阻并联有分流关系，利用式(2.5a)可以推导出分流公式(2.8)，各并联电阻的电流 i_k 与端口电流 i 为分流关系。

$$i_k=\frac{u}{R_k}=G_k u=G_k\frac{i}{G_{eq}}=\frac{G_k}{G_{eq}}i \tag{2.8}$$

常见两个电阻并联的情况，将式(2.6)代入式(2.8)，两支路的电流分别为

$$\left.\begin{aligned}i_1&=\frac{u}{R_1}=\frac{R_{eq}i}{R_1}=\frac{R_2}{R_1+R_2}i\\ i_2&=\frac{u}{R_2}=\frac{R_{eq}i}{R_2}=\frac{R_1}{R_1+R_2}i\end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

式(2.8)表明：由于并联电路电压相同，电阻值越大电导越小分得的电流越小，并联分流与电阻值成反比与电导值成正比。

3. 并联电路的功率关系

电阻并联电路消耗的总功率等于相并联各电阻消耗功率之和，且电阻大的消耗的功率小。以两个电阻并联为例

$$\left.\begin{aligned}p&=p_1+p_2\\ \frac{p_1}{p_2}&=\frac{i_1^2R_1}{i_2^2R_2}=\frac{R_2}{R_1}\end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

式(2.10)是将式(2.9)代入得到的。说明并联电阻的功率大小与电阻大小成反比。

2.2.3　电阻的混联

电路中既有电阻的串联又有电阻的并联称为混联电路(series-parallel connection)。实际电路中更常见的是混联电路，分析计算混联电路时，要仔细观察，认真判别电阻间的连接方式，对于短路导线连接的两点，可以缩成一点，节点最好标明符号，等电位的节点可以短路。经处理后，可以使电路简化。

下面通过例题来理解混联电路的分析方法。

[例 2.1] 在图 2.5 中，$R_1 = 10\Omega$，$R_2 = 20\Omega$，$R_3 = 20\Omega$，$R_4 = 40\Omega$，$U_S = 90V$。

(1) S 打开时，求开关两端电压；(2) S 闭合时，求流经开关的电流。

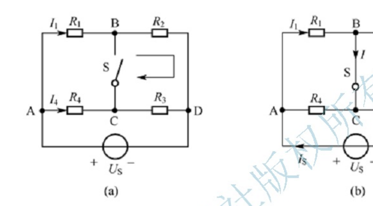


图 2.5　例 2.1 电路图

[解] (1) S 打开时，各支路电流如图 2.5(a)所示，则由假想回路 BDCB，利用 KVL 得

$$U_{BC} = I_1R_2 - I_4R_3$$

$$I_1 = \frac{U_S}{R_1 + R_2} = \frac{90}{10+20}A = 3A$$

$$I_4 = \frac{U_S}{R_3 + R_4} = \frac{90}{20+40}A = \frac{3}{2}A$$

$$U_{BC} = \left(3\times 20 - \frac{3}{2}\times 20\right)V = 30V$$

(2) 由图 2.5(b)开关 S 闭合后，电阻 R_1和R_4 并联，与 R_2和R_3 并联的电阻再串联。所以有

$$I_S = \frac{U_S}{R_1 // R_4 + R_2 // R_3} = \frac{90}{18} = 5A$$

$$I_1 = \frac{R_4}{R_1 + R_4}I_S = \left(\frac{40}{50}\times 5\right)A = 4A$$

$$I_2 = \frac{R_3}{R_2 + R_3}I_S = \left(\frac{1}{2}\times 5\right)A = 2.5A$$

利用 KCL 有：

$$I = I_1 - I_2 = 1.5A$$

[例 2.2] 求如图 2.6(a)、(b)所示电路的等效电阻 R_{eq}。

[解] 解题分析：

(1) 首先将各节点标上符号或数字；

(2) 将短路线两端画在同一点上，即把短路线缩短或拉长，若有多个接地点，可用短路线相连；

(3) 再将元件画在各点之间，分析元件的连接关系。

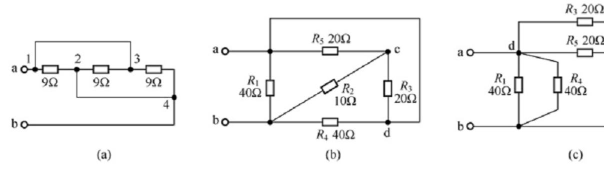


图 2.6　例 2.2 电路图

观察图 2.6(a)将 1、3 及 2、4 缩为一点，三个电阻均接在 a、b 之间，是并联连接，等效电导为

$$G_{eq}=G_1+G_2+G_3=3\times\frac{1}{9}\text{S}=\frac{1}{3}\text{S}$$

等效电阻为

$$R_{eq}=\frac{1}{G_{eq}}=3\Omega$$

观察图 2.6(b)将 a 点和 d 点短路线缩为一点。可以得到图 2.6(c)，等效电阻为

$$\begin{aligned}R_{ab}&=(R_3 // R_5+R_2)//(R_1 // R_4)\\&=\left(\frac{20}{2}+10\right)//\frac{40}{2}\Omega=\frac{20\times20}{20+20}\Omega=10\Omega\end{aligned}$$

2.2.4　电阻 Y-△连接电路的等效变换

在如图 2.7 所示不平衡桥式电路中，电阻间不能利用串、并联进行等效化简。这时就需要进行电阻△-Y 连接电路等效变换，简化电路。

1. 电阻的△连接

将图 2.7 电路 1 节点拽紧，三个电阻 R_{12}、R_{13}、R_{23}，它们的两个端子分别首尾相连，形成电路像△形，这种连接方式称为电阻的△连接，如图 2.8(a)所示。

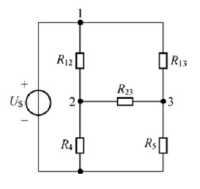
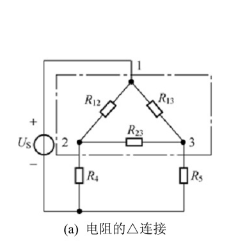


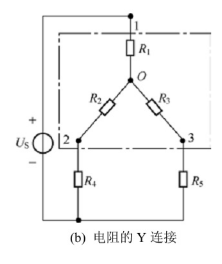
图 2.7　不平衡电桥电路

2. 电阻的 Y 连接

三个电阻 R_1、R_2、R_3 各有两个端子，将每个电阻的一个端子连接在一起，构成一个共同的节点，另外三个端子作为引出端与外电路相连，如图 2.8(b)所示，这种连接方式称为电阻的 Y 连接或星形连接。



(a) 电阻的△连接



(b) 电阻的 Y 连接

图 2.8　电阻的△连接和 Y 连接

3. 电阻△形连接电路等效变换为 Y 形电路

所谓△形电路等效变换为 Y 形电路，就是已知△形电路中三个电阻 R_{12}、R_{13}、R_{23}，通过变换公式求出 Y 形电路中的三个电阻 R_1、R_2、R_3，来替换△形电路中的三个电阻，电路改接成 Y 形，这就完成了△形等效变换为 Y 形的任务。

△形电路等效变换为 Y 形电路，其等效变换条件或公式为

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= \frac{R_{12}R_{13}}{R_{12}+R_{23}+R_{13}} \\ R_2 &= \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{13}} \\ R_3 &= \frac{R_{13}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{13}} \end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

观察图 2.8(a)、(b)由△形变换为 Y 形电路时三个电阻连接与记忆技巧：

在△形电路中心点一个 O 点，O 点分别与 1，2，3 个端点连接电阻 R_1、R_2、R_3，R_1 的阻值等于△形电路中与端 1 相连的两个电阻 R_{12} 与 R_{13} 之积除以△形连接的三个电阻 R_{12}、R_{13} 和 R_{23} 之和；R_2 的阻值等于△形电路中与端 2 相连的两个电阻 R_{12} 和 R_{23} 之积除以△形连接的三个电阻 R_{12}、R_{13} 与 R_{23} 之和；同理，可以求得式(2.11)R_3 的阻值。

如果△形连接的三个电阻 R_{12}、R_{13} 与 R_{23} 相等，即 $R_{12}=R_{23}=R_{13}=R_{\Delta}$，则等效 Y 形连接中的三个电阻也相等，它们等于

$$R_1 = R_2 = R_3 = \frac{1}{3}R_{\Delta} \tag{2.12}$$

4. Y 电阻连接电路等效变换为△形电路

Y 形电路等效变换为△形电路，就是已知 Y 形电路中三个电阻 R_1、R_2、R_3,，通过变换公式求出△形电路中的三个电阻 R_{12}、R_{13}、R_{23}，也就是由图 2.8(b)电路变换为图 2.8(a)电路图。

Y 形电路等效变换为△形电路，其等效变换条件或公式为

$$\left.\begin{aligned}R_{12}&=\frac{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}{R_3}=R_1+R_2+\frac{R_1R_2}{R_3}\\R_{23}&=\frac{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}{R_1}=R_2+R_3+\frac{R_2R_3}{R_1}\\R_{13}&=\frac{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}{R_2}=R_1+R_3+\frac{R_1R_3}{R_2}\end{aligned}\right\}\tag{2.13}$$

由 Y 形变换为△形电路时三个电阻连接与记忆技巧：

将 Y 形电路中的三个端点 1，2，3 互相用电阻连接，即 1、2 端连上电阻 R_{12}，2、3 两端连上电阻 R_{23}，1、3 两端连上电阻 R_{13}。电阻 R_{12} 等于 R_1 与 R_2 之和加上 R_1 与 R_2 之积除以 Y 形连接剩余的第三者 R_3；同理可以求得 R_{23} 和 R_{13}。

如果 Y 形电路中三个电阻 R_1、R_2、R_3 相等，则等效△形连接的三个电阻也相等：

$$R_{12}=R_{23}=R_{13}=3R_Y\tag{2.14}$$

[例 2.3] 如图 2.9(a)所示电路为桥式电路，求电流 i_2 和 1，4 两端子之间的等效电阻。

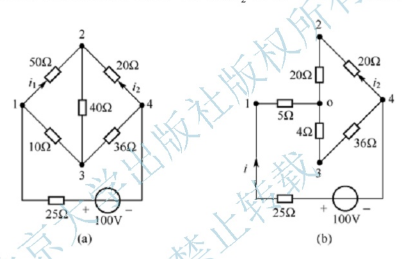


图 2.9　例 2.3 电路图

[解] 端子 1、2、3 之间的三个电阻为△形连接，把它等效变换为 Y 形连接，如图 2.9(b)所示，图中等效 Y 形连接的电阻利用式(2.11)计算：

$$R_1=\frac{R_{12}R_{13}}{R_{12}+R_{23}+R_{13}}=\frac{10\times50}{50+10+40}\Omega=5\Omega$$

$$R_2=\frac{R_{12}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{13}}=\frac{40\times50}{50+10+40}\Omega=20\Omega$$

$$R_3=\frac{R_{13}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{13}}=\frac{10\times40}{50+10+40}\Omega=4\Omega$$

于是

$$R_{14}=[5+(20+20)//(4+36)]\Omega=25\Omega$$

总电阻为

$$R=25\Omega+25\Omega=50\Omega$$

电流

$$i=\frac{100}{50}\text{A}=2\text{A}$$

利用分流公式，电流

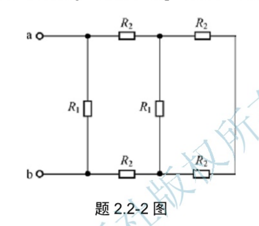
$$i_2 = -\frac{4+36}{4+36+20+20} \times i = -1\text{A}$$

注意 i_2 的方向。

思考与练习

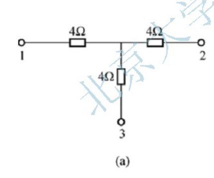
2.2-1　电阻并联电路中，阻值较大的电阻上分流较________，功率较________。

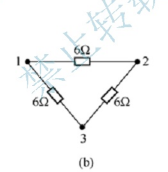
2.2-2　题 2.2-2 图所示电路中，已知 $R_1 = 10\Omega$， $R_2 = 5\Omega$，求 a 、 b 两端的等效电阻 R 。

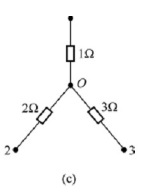


题 2.2-2 图

2.2-3　题 2.2-3 图所示电路中，画出图(a)、(c)的△形等效电路，画出图(b)的 Y 形等效电路，并求各图的等效电阻。

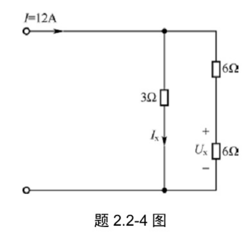






题 2.2-3 图

2.2-4　求题 2.2-4 图电路图中的 I_x 和 U_x 。(9.6A，14.4V)



题 2.2-4 图

2.3　电压源、电流源电路的等效变换

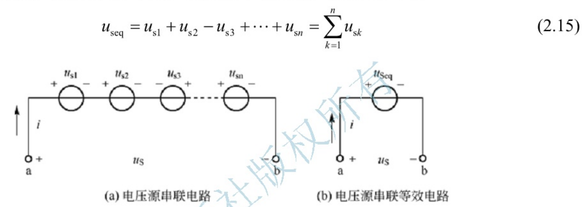
本节先介绍理想电压源、电流源的串、并联的等效电路，然后重点讨论实际电源的两种模型及其等效变换的问题。

2.3.1　电压源的串、并联及等效电路

1. 电压源的串联及等效电路

如图 2.10(a)所示电路是由 n 个独立电压源串联组成，根据 KVL 有

$$u_{\mathrm{seq}}=u_{\mathrm{s}1}+u_{\mathrm{s}2}-u_{\mathrm{s}3}+\cdots+u_{\mathrm{s}n}=\sum_{k=1}^{n}u_{\mathrm{s}k} \tag{2.15}$$



(a) 电压源串联电路　　(b) 电压源串联等效电路

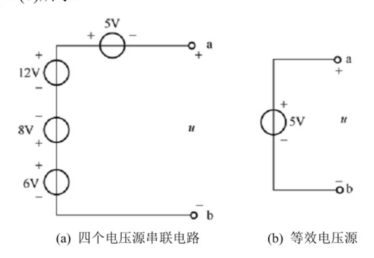
图 2.10　独立电压源串联电路

图 2.10(b)所示的等效电路为一个理想电压源，其电压是这 n 个电压源电压的代数和，其中电压源参考方向与等效电压源 u 参考方向一致的 u_{sk} 取正值，相反则取负值。

例如图 2.11(a)所示四个电压源串联，注意各电压源的参考方向，其等效电压源电压为

$$u=-5\mathrm{V}+12\mathrm{V}-8\mathrm{V}+6\mathrm{V}=5\mathrm{V}$$

其等效电路图如图 2.11(b)所示。



(a) 四个电压源串联电路　　(b) 等效电压源

图 2.11　四个电压源串联电路及其等效电压源

2. 电压源的并联

只有电压相等且极性相同的电压源才能并联，如图 2.12 所示。否则，不满足 KVL。或称该电路中的元件“模型失效”。

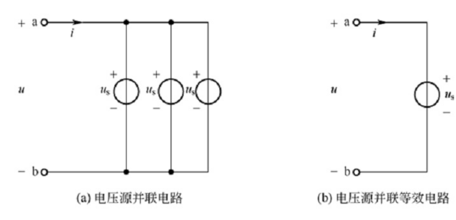


图 2.12　电压源并联电路及其电压源并联等效电路

3. 电压源与其他支路并联

当电压源 u_S 与电流源或任一元件并联后外接电阻如图 2.13(a)、图 2.13(b)所示，对外接的电阻 R_L 而言，R_L 承受的电压都是 u_S，电流也没变化。因此，电压源 u_S 并联任意支路对外电路来讲可用一个等效电压源替代，等效电压源的电压仍为 u_S。图 2.13(a)、图 2.13(b)对外电路的等效电路如图 2.13(c)所示。

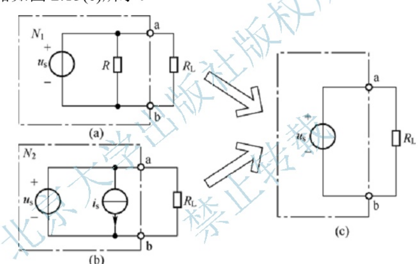


图 2.13　电压源与支路并联

2.3.2　电流源的并、串联及等效电路

1. 电流源的并联及等效电路

如图 2.14(a)所示电路为 n 个独立电流源并联组成，根据 KCL 有式(2.16)

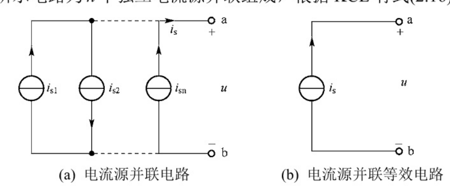


图 2.14　电流源的并联及等效电路

$$i_S = i_{S1} - i_{S2} + \cdots + i_{Sn} = \sum_{k=1}^{n} i_{Sk} \tag{2.16}$$

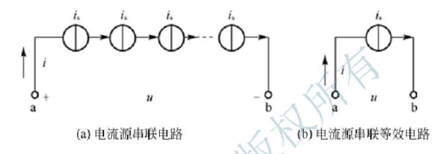
因此 n 个独立电流源并联电路可以等效为一个电流源，该电流源的电流 i_S 为这 n 个并联电流源电流的代数和，其中电流源参考方向与等效电流源 i_S 参考方向一致的 i_{Sk} 取正值，相反则取负值。

例如图 2.14(a)中 $i_{S1} = -2\text{A}$，$i_{S2} = 5\text{A}$，$i_{S3} = 10\text{A}$，那么，等效电流为

$$i_S = i_{S1} - i_{S2} + i_{S3} = (-2)\text{A} - 5\text{A} + 10\text{A} = 3\text{A}$$

2. 电流源的串联及等效电路

只有电流相等且参考方向相同的电流源才能串联，如图 2.15 所示。否则，不满足 KCL。



(a) 电流源串联电路　(b) 电流源串联等效电路

图 2.15　电流源的串联及等效电路

3. 电流源与电压源或其他支路串联

当电流源 i_S 与电压源或任一元件串联且外接电阻 R_L 时如图 2.16(a)，(b)所示，外接的电阻 R_L 所流过的电流都是 i_S，其上的电压也没变化。因此，电流源 i_S 串联任意支路对外电路来讲就是一个等效电流源 i_S。图 2.16(a)、图 2.16(b)分别是电流源与电阻串联、电流源与电压源串联电路，它们对外电路的等效电路如图 2.16(c)所示。注意图 2.16(c)等效变换是针对外电路，对电源部分是不等效的。

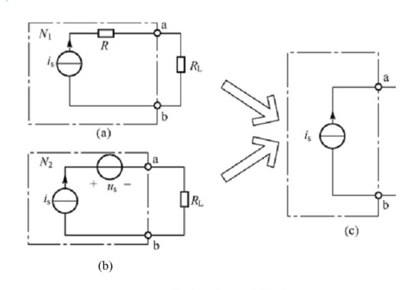


图 2.16　电流源与支路串联

[例 2.4] 化简图 2.17 电路。

[解] 应用电压源与其他支路并联等效为电压源，电流源与其他支路串联为等效电流源，按

图示化简，最后得到图 2.17(d)最简等效电路。

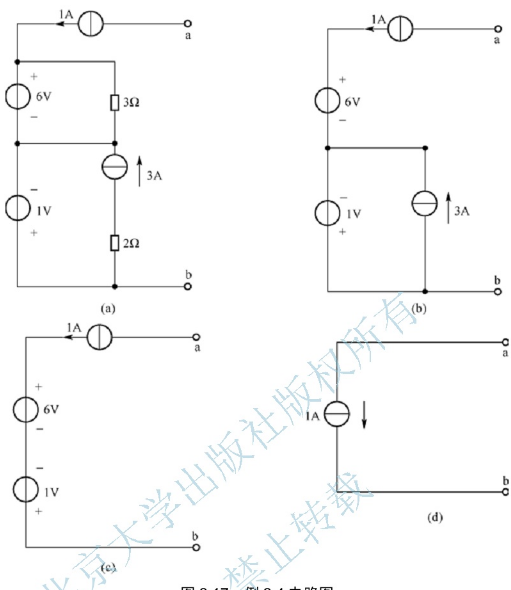


图 2.17　例 2.4 电路图

2.3.3　两种实际电源模型的等效变换

1. 两种实际电源模型

直流理想电压源(ideal voltage source)的输出为一条平行于电流的直线(如图 2.18(b)中的虚线)，表明电压源具有恒压的特性。但在实际工作中对实际电源进行测试，得到的输出伏安特性如图 2.18(b)所示，随着电流的增大，电压 u 是减小的，说明实际上电压源产生能量的同时还消耗能量，因此可以抽象得到实际电压源的电路模型为电压源与电阻的串联，称为实际电压源的模型，如图 2.18(c)所示，其中 R_S 通常称为内阻。可以得到

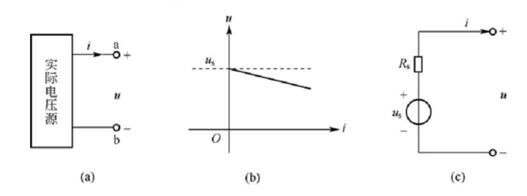
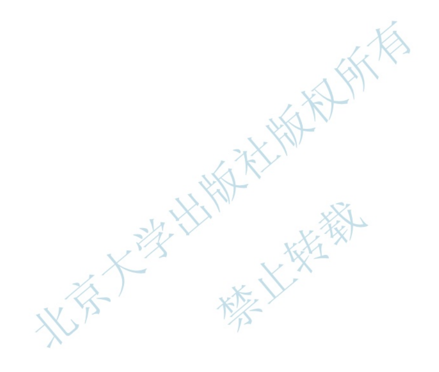


图 2.18　实际电压源的伏安特性与电路模型



$$u = u_S - iR_S \tag{2.17}$$

工程实际中的电压源一旦出现短路，电源发热量将会急剧上升，造成电源的绝缘材料烧毁，电源损坏。要倍加小心。

实际工作中电流源产生电能的同时还消耗电能，因此实际电流源可以抽象成一个理想电流源(ideal current source)与电阻并联的电路模型，如图 2.19(c)所示，R_S 称为内阻。

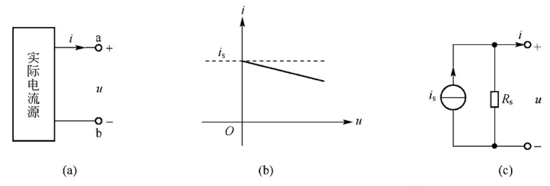


图 2.19　实际电流源的伏安特性与电路模型

由图 2.19(c)利用 KCL 得

$$i = i_S - \frac{u}{R_S} \tag{2.18}$$

2. 两种实际电源的等效变换

已知电压源模型，求出等效的电流源模型，即将图 2.20(a)、图 2.20(b)两种电源进行等效变换。

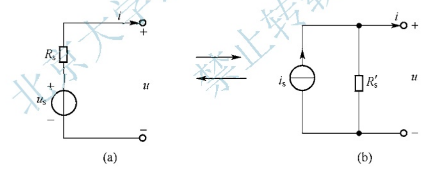


图 2.20　两种电源模型的等效变换

实际电压源端口的伏安关系为式(2.17)，将式子两边同除 R_S，整理得

$$\frac{u}{R_S} = \frac{u_S}{R_S} - i \qquad i = \frac{u_S}{R_S} - \frac{u}{R_S}$$

利用等效条件：保持端口伏安关系相同。将上式与电流源的伏安关系式(2.18)比较，则

$$\boxed{i_S = \frac{u_S}{R_S} \qquad R'_S = R_S} \tag{2.19}$$

所以当由电压源模型图 2.20(a)，等效变换为图 2.20(b)电流源模型时，电流源的电流为 $i_S = \dfrac{u_S}{R_S}$，电阻 R'_S 仍为 R_S 不变。注意电流源 i_S 的方向是由电压源的正极流出。

同理可推出：当由电流源模型图 2.20(b)等效变换为图 2.20(a)电压源模型时，电压源的电压为 $u_S = R'_S i_S$，电阻不变。注意：电压源的正极为图 2.20(b)电流源的电流流出一端。

图 2.20 两种电源模型的等效变换称为电源的等效变换法，利用它可以化简电路。

这里的等效变换是指对外电路等效，理想电压源与理想电流源是不能等效互换的。

[例 2.5] 利用电源的等效变换法求图 2.21(a)中的 3Ω 电流 I。

[解] 图 2.21(a)中，8V 电压源与电阻 6Ω 并联等效为 8V 电压源后，8V 电压源与 2Ω 串联等效为电流源与电阻并联，等效电路为图 2.21(b)，不断进行电源等效变换，变换时注意电流源的流向和电压源的正负极。最后可得到图 2.21(d)所示等效电路。

利用图 2.21(d)求得

$$I = \frac{1-6}{1+1+3}\text{A} = -1\text{A}$$

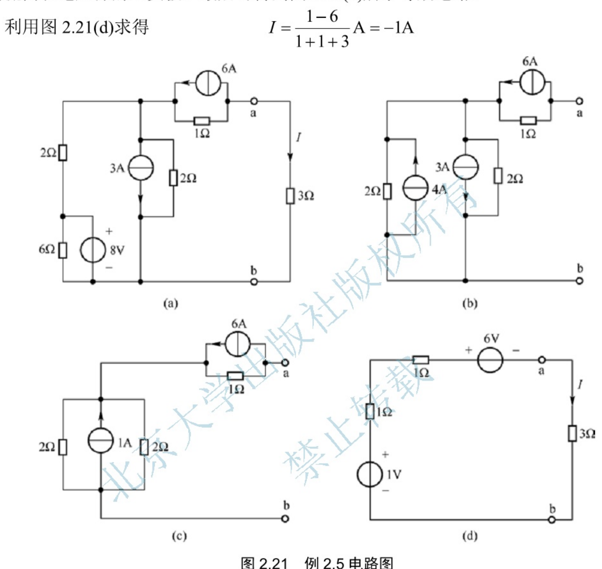


图 2.21　例 2.5 电路图

思考与练习

2.3-1　判断下列题目的正误。

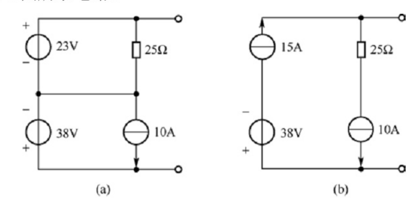
(1) 一个理想电压源与电阻的串联电路可以等效变换为一个电流源与电阻的并联电路。 (　　)

(2) 一个理想电压源与电阻的串联电路可以等效变换为一个电流源与电阻的串联电路。 (　　)

(3) 一个理想电流源与电阻的并联电路可以等效变换为一个电压源与电阻的串联电路。 (　　)

2.3-2　某实际电源，当外电路开路时两端电压为 10V，当外电路接 $R = 5\Omega$ 电阻时两端电压为 5 V。试画出该实际电源的电压源模型与电流源模型。

2.3-3　化简题 2.3-3 图所示电路。



题 2.3-3 图

2.4　含受控源电路的等效变换

受控源与独立电源的不同之处在于它的电压(电流)受电路中某支路电压或电流的控制，对含有受控源的二端网络的等效变换与独立源等效变换基本相同，在等效变换时受控源可先当做独立源进行变换，不过在变换时一般应保持控制量所在支路不变。

[例 2.6] 求图 2.22(a)所示电路的等效电阻。

[解] 分析 2.22(a)的电路图，图中二端网络除了电阻外还有受控源，但无独立源，要求出端口处的等效电阻，**就要利用式 $R_{eq}=u/i$，即通过端口处的电压除以端口的电流来求出 R_{eq}，一般也将这个等效电阻称为输入电阻 R_{in}**。可以用外加电压法计算，即在端口处加一电压源激励，求出流入端口的响应电流，它们的比值即为端口的输入电阻。

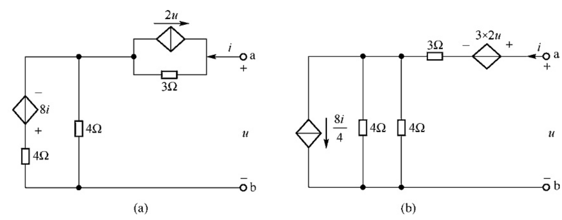
将图 2.22(a)的电压控制的电流源 $2u$ (与 3Ω 并联)、电流控制的电压源 $8i$ (与 4Ω 串联)，利用电源等效变换法分别化简为受控电压源 $3\times2u$ 与 3Ω 电阻串联、受控电流源 $8i/4$ 与 4Ω 电阻并联如图 2.22(b)所示，此时它们相应的控制量不变，再利用电流源与电阻并联化简为受控电压源 $2\times2i$ 与电阻串联，如图 2.22(c)所示。

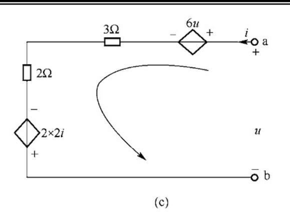
对图 2.22(c)利用 KVL 列方程

$$6u+(3+2)i=4i+u \qquad 5u=4i-5i=-i$$

$$R_{eq}=\frac{u}{i}=-\frac{1}{5}\Omega$$

含有受控源的电路的等效电阻有可能出现负电阻。





(c)

图 2.22　例 2.6 电路图

[例 2.7] 如图 2.23(a)所示电路中 $U_S = 22\text{V}, R_1 = 1\Omega, R_2 = 4\Omega, \beta = 1.5$，求图 2.23(a)中的电流 I_1 及受控源的功率。

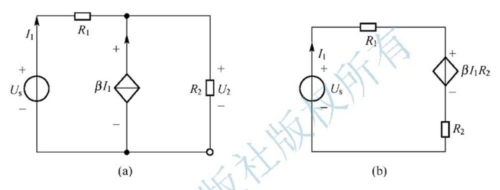


图 2.23　例 2.7 电路图

[解] 将受控电流源 βI_1 和电阻 R_2 的并联电路等效变换为受控电压源与电阻的串联电路，如图 2.23(b)所示，根据 KVL，可得

$$U_S = R_1 I_1 + \beta I_1 R_2 + I_1 R_2$$

$$1 \times I_1 + 1.5 \times 4I_1 + 4I_1 = 22$$

$$I_1 = 2\text{A}$$

在图 2.23(a)中求受控电流源两端的电压

$$U_2 = U_S - I_1 R_1 = 22\text{V} - 2 \times 1\text{V} = 20\text{V}$$

受控源的电压与电流为非关联参考方向，所以受控电流源的功率为

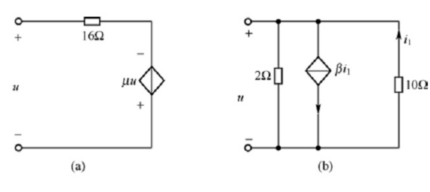
$$P = -UI = -U_2 \times (\beta I_1) = -20 \times 1.5 \times 2\text{W} = -60\text{W}\ (\text{提供功率})$$

注意：在变换过程中，受控源控制支路始终不能变动，否则受控源的控制量就不存在了。

思考与练习

2.4-1　受控电流源与电阻并联和受控电压源与电阻串联电路等效变换时，控制系数将如何变换？

2.4-2　求题 2.4-2 图所示二端电路的输入电阻，其中图(a)中 $\mu = 3$，图(b)中 $\beta = 8$。(4Ω，-5Ω)



题 2.4-2 图

2.5　实际应用举例

电阻的分压性质常应用于电表的量程扩大，如图 2.24 所示电路。

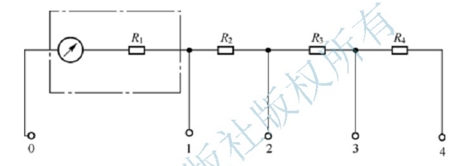


图 2.24　扩大电压表量程的电路图

下面的任务是将一个满刻度偏转电流为0.5mA，内阻为 R_1=1 kΩ 的表头，设计成一个能测量 5V， 50V 及 500V 的电压表。

由于表头内阻一定，当表头两端接上被测电压 U 时，流过表头两端的电流随 U 变化而变化，且与其成正比。若指针的偏转角度与电流成正比，也和电压成正比。因此在表盘上刻上电压刻度，就可以测量电压了。

图 2.24 中，已知表头的内阻为 R_1=1 kΩ，而最大偏转电流为0.5mA，当开关在“1”挡时(“2”、“3”、“4”端钮断开)

$$U_{10}=R_1 I=1\times 0.5\text{V}=0.5\text{V}$$

所以这个表头所能测量的最大电压为0.5V。若被测电压超过0.5V，则表头会被烧毁。可以采用表头串联电阻的方法，利用串联电阻分压原理，使多出的电压降在串联电阻上，使得表头压降不超过0.5V。当开关在“2”挡时对应5V 电压量程(“1”、“3”、“4”端钮断开)

$$U_{20}=(R_1+R_2)I=(1+R_2)\times 0.5=5\text{V}，\quad R_2=9\text{k}\Omega$$

当开关在“3”挡时对应50V 电压量程(“1”、“2”、“4”端钮断开)

$$U_{30}=(R_1+R_2+R_3)I=(1+9+R_3)\times 0.5=50\text{V}，\quad R_3=90\text{k}\Omega$$

当用“0”、“4”端测量时，电压表的总电阻为 $R=R_1+R_2+R_3+R_4$，若这时所测的电压恰好为 500V(这时表头也达到满量程)，则通过表头电流仍为0.5mA

$$R=\frac{U_{40}}{I}=\frac{500}{0.5}\text{k}\Omega=1000\text{k}\Omega$$

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = 1000\text{k}\Omega$$

则

$$R_4 = R - (R_1 + R_2 + R_3) = 1000\text{k}\Omega - 1\text{k}\Omega - 9\text{k}\Omega - 90\text{k}\Omega = 900\text{k}\Omega$$

由此可见，直接利用该表头测量电压，它只能测量 0.5V 以下的电压，而串联了分压电阻 $R_2 = 9\text{k}\Omega$，$R_3 = 90\text{k}\Omega$，$R_4 = 900\text{k}\Omega$ 以后，作为电压表，它就有 0.5V、5V、50V、500V 四个量程，实现了电压表的量程扩展。

同理，也可以利用并联电阻分流的原理，实现电流表的量程扩展。

2.6 小　结

1. 电路的等效变换定义

设有 N_1 和 N_2 两个单口网络，只要它们端口处的电压-电流完全相同，它们对连接到端口上的任一外部电路的作用效果相同，则 N_1 和 N_2 就是两个互为等效的单口网络。“等效”是对外部电路而言的，在电路的变换部分内部，变换前后不存在等效关系。

2. 电阻的等效变换

1) 电阻串联等效变换

当 n 个电阻串联时，等效电阻的计算公式为

$$R_{\text{eq}} = \sum_{k=1}^{n} R_k$$

在串联电路中，各电阻电压与端口电压之间满足

$$u_k = R_k i = \frac{R_k}{R_{\text{eq}}} u \qquad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

2) 电阻并联等效变换

当 n 个电阻并联时，其等效电导的计算公式为

$$G = \sum_{k=1}^{n} G_k$$

在并联电路中，第 k 个电导中 G_k 的电流 i_k 计算公式

$$i_k = \frac{G_k}{G_{\text{eq}}} i \qquad (k = 1,\ 2, \cdots, n)$$

3) 电阻串、并联电路

既有串联又有并联结构的电路称为串并联电路，也就是混联电路。

分析串、并联电路的关键是看清元件的串、并联关系，即通过同一电流的元件为串联，承受同一电压的元件为并联。

电路中含有短路线时，往往不易看清元件的连接关系。一般的做法是消去短路线，即将短路线缩短为点，使其连接的两个端点合并为一个点。

4) 电阻星形连接与三角形连接的等效变换

Y-△等效变换公式

△→Y时

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= \frac{R_{12}R_{13}}{R_{12}+R_{23}+R_{13}} \\ R_2 &= \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{13}} \\ R_3 &= \frac{R_{13}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{13}} \end{aligned}\right\}$$

Y→△时

$$\left.\begin{aligned} R_{12} &= \frac{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}{R_3} = R_1+R_2+\frac{R_1R_2}{R_3} \\ R_{23} &= \frac{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}{R_1} = R_2+R_3+\frac{R_2R_3}{R_1} \\ R_{13} &= \frac{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}{R_2} = R_1+R_3+\frac{R_1R_3}{R_2} \end{aligned}\right\}$$

3. 电源的等效变换

1) 理想电源的串、并联

当 n 个理想电压源串联时，可等效为一个理想电压源，其电压是这 n 个电压源电压的代数和。

n 个理想电流源并联电路可以等效为一个理想电流源，该电流源的电流 i_S 为这 n 个并联电流源电流的代数和。

2) 实际电源模型的等效变换

实际电压源的电路模型是一个理想电压源和一个电阻的串联，实际电流源的电路模型是一个理想电流源和一个电导(电阻)的并联。实际电源的两种模型的等效变换条件是

$$I_S = \frac{U_S}{R_S} \qquad R_S' = R_S$$

等效变换时注意等效的电流源的流向和电压源极性。

4. 受控源的等效变换

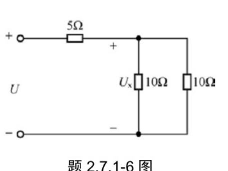
一个受控电压源和电阻串联的单口，可以与一个受控电流源和电阻并联的单口进行等效变换，变换的办法是将受控源当做是独立电源一样进行变换，但变换过程中一定要保证受控源的控制量在变换前后不变。

2.7 习　　题

2.7.1 填空题

1. 电压值不相等的电压源____________可以并联。
2. 电流相等的电流源____________串联。

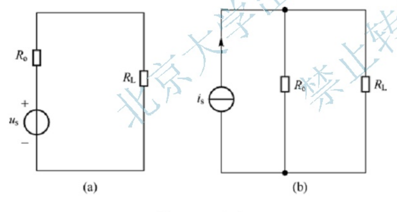
3. 电阻串联电路中，阻值较大的电阻上分压较__________，功率较__________。
4. 两个电阻并联后，总电阻值__________。
5. 当把电阻为 $R_{12}=R_{23}=R_{31}=R_{\triangle}$ 的三角形电路等效成星形电路时，其星形电阻为__________。
6. 电路如题 2.7.1-6 图，已知 $U=10\text{V}$，则 $U_x=$__________。
7. 电路如题 2.7.1-7 图所示，$I_R=$__________。



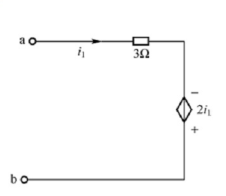
题 2.7.1-6 图

题 2.7.1-7 图

8. 理想电压源与理想电流源之间__________等效变换，而实际电压源与实际电流源之间则__________等效变换。
9. 由电源的等效变换可知，题 2.7.1-9 图(a)电路可用图(b)电路等效代替，图(a)、图(b)电路 R_o 消耗的功率__________；图(a)、(b)电路 R_L 消耗的功率__________。
10. 题 2.7.1-10 电路图中 ab 端的等效电阻为__________。



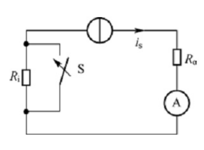
题 2.7.1-9 图

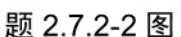


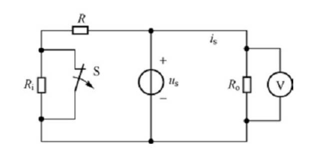
题 2.7.1-10 图

2.7.2 选择题

1. 设两个二端网络对外是等效的，则下列说法哪个是正确的？(　　)
   A. 它们的外特性相同　　B. 它们的内部特性相同
   C. 它们的内部结构相同　　D. 它们的内部电源相同
2. 题 2.7.2-2 图所示电路中，当开关 S 闭合后，电流表的读数将(　　)。
   A. 减少　　B. 增大　　C. 不变　　D. 不定
3. 题 2.7.2-3 图所示电路中，当开关 S 打开后，电压表的读数将(　　)。
   A. 减少　　B. 增大　　C. 不变　　D. 不定




题 2.7.2-2 图



题 2.7.2-3 图

4. 设 R_Y 为对称 Y 形电路中的一个电阻，则与其等效的△形电路中的每个电阻等于(　　)。

A. $\sqrt{3}R_Y$　　B. $3R_Y$　　C. $\frac{1}{3}R_Y$　　D. $\frac{1}{\sqrt{3}}R_Y$

5. 理想电压源的源电压为 U_S，端口电路为 I，则其内阻为(　　)。

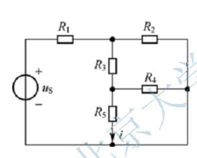
A. I/U_S　　B. ∞　　C. U_S/I　　D. 0

6. 题 2.7.2-6 图所示电路中，已知 $u_S = 28\text{V}$，$R_1 = 1\Omega$，$R_2 = R_3 = 2\Omega$，$R_4 = R_5 = 4\Omega$，图中电流 $i =$(　　)。

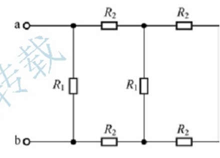
A. 1A　　B. 2A　　C. 2.5A　　D. 4A

7. 题 2.7.2-7 图所示电路中，已知 $R_1 = 10\Omega$，$R_2 = 5\Omega$，a 、b 两端的等效电阻 $R =$(　　)。

A. 6Ω　　B. 5Ω　　C. $20/3\Omega$　　D. $40/3\,\Omega$



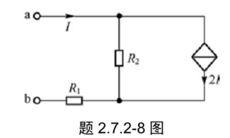
题 2.7.2-6 图



题 2.7.2-7 图

8. 题 2.7.2-8 图所示电路中，已知 $R_1 = 20\Omega$，$R_2 = 5\Omega$，a 、b 两端的等效电阻是(　　)。

A. 4Ω　　B. 25Ω　　C. 20Ω　　D. 15Ω



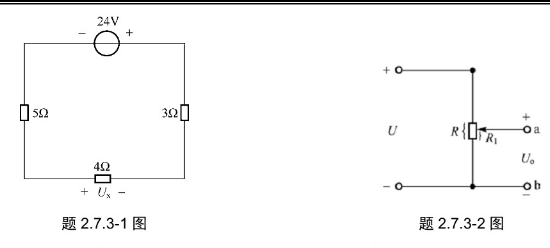
题 2.7.2-8 图

2.7.3　计算题

1. 求题 2.7.3-1 图中所示电路中 U_x 。

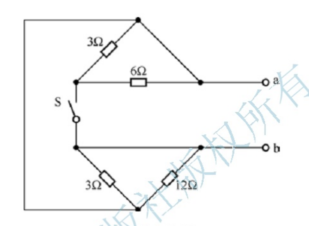
2. 题 2.7.3-2 图所示电路中，已知可变电阻器的电阻 $R = 100\Omega$，电源电压 $U = 220\text{V}$，当 a、b 两点开路时，试在下述情况下分别计算电压 U_o：

(1) $R_1 = 0$；(2) $R_1 = 0.5R$；(3) $R_1 = 0.8R$ 。



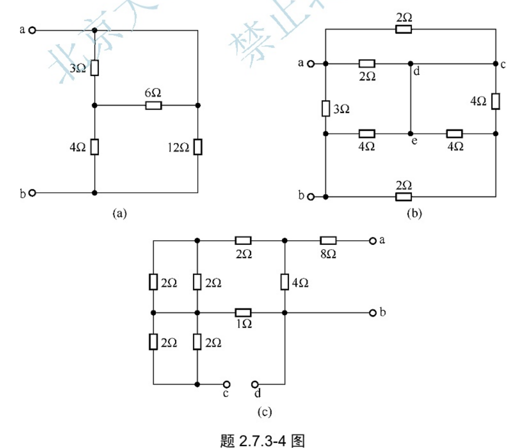
题 2.7.3-1 图　　　　题 2.7.3-2 图

3. 在题 2.7.3-3 图中将开关 S 打开、合上时的 a、b 两端等效电阻。



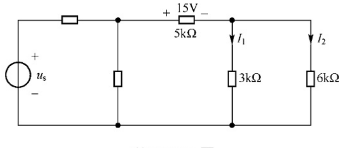
题 2.7.3-3 图

4. 如题 2.7.3-4 图所示电路中，求：(1)图(a)、图(b)中 a、b 两端的等效电阻 R_{ab}；(2)图(c)中 a、b 两端的等效电阻 R_{ab} 及 c、d 两端的等效电阻 R_{cd}。



题 2.7.3-4 图

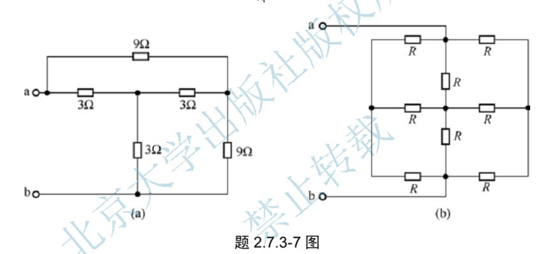
5. 求题 2.7.3-5 图所示电路中的电流 I_1 和 I_2。



题 2.7.3-5 图

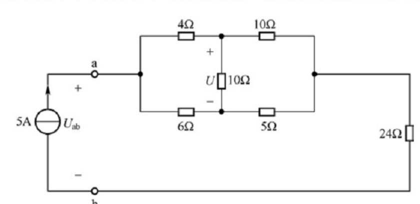
6. 已知两个灯泡额定电压为110V，功率分别为40W 和15 W，它们并联在110V 的直流电源上，问：
   (1) 每只灯泡的电阻和额定电流是多少？
   (2) 能否将它们串联在 220V 的电源上使用？为什么？
   (3) 若有一只 220V 、40W 和一只 220V 、15W 的灯泡串联后接在 220V 的电源上使用，会发生什么现象？

7. 求题 2.7.3-7 图所示电路中的等效电阻 R_{eq}。图(b)中所有电阻均为3Ω。



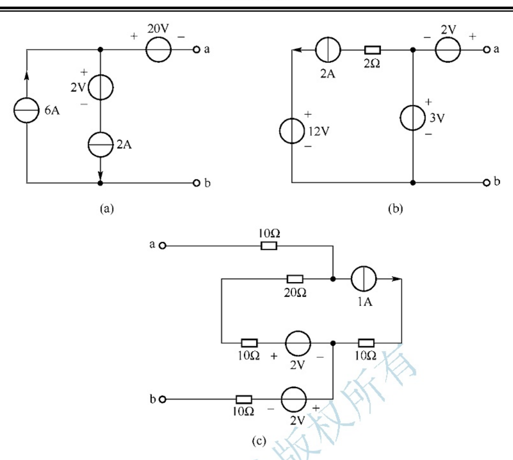
题 2.7.3-7 图

8. 题 2.7.3-8 图所示电桥中，应用 Y−△等效变换，试求对角线电压 U 及电压 U_{ab}。



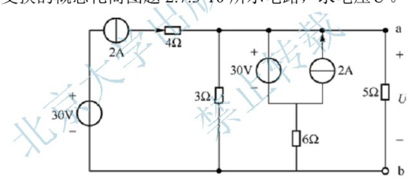
题 2.7.3-8 图

9. 用电源的等效变换的概念，求题 2.7.3-9 图中所示电路的最简等效电路。



题 2.7.3-9 图

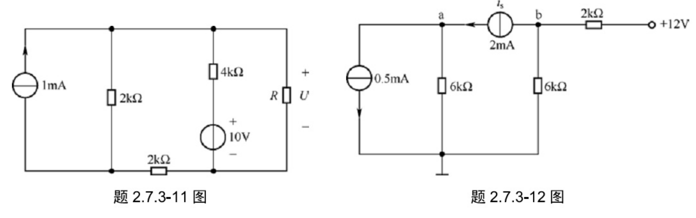
10. 用电源等效变换的概念化简图题 2.7.3-10 所示电路，求电压 U。



题 2.7.3-10 图

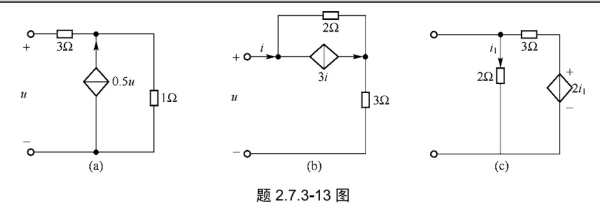
11. 电路如题 2.7.3-11 图所示，已知 $U=3\text{V}$，用电源等效变换法求电阻 R。

12. 电路如题 2.7.3-12 图所示，求 a、b 点的电位及电流源 i_s 产生的功率 P_s。



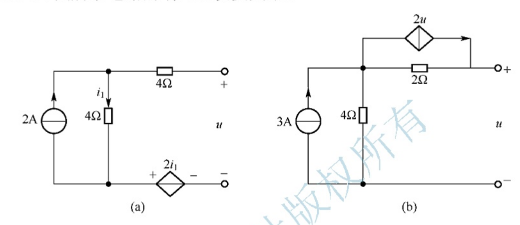
题 2.7.3-11 图　　　题 2.7.3-12 图

13. 求题 2.7.3-13 图所示电路的输入电阻。



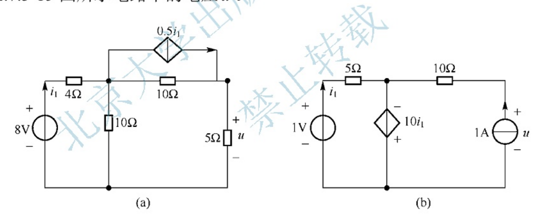
题 2.7.3-13 图

14. 求题 2.7.3-14 图所示电路的端口上伏安关系。



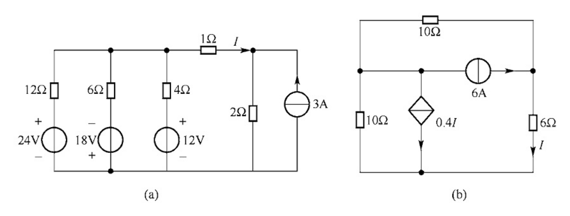
题 2.7.3-14 图

15. 求题 2.7.3-15 图所示电路中的电压 u 。



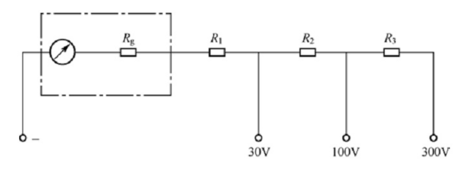
题 2.7.3-15 图

16. 如题 2.7.3-16 图所示电路中，求电流 I 。



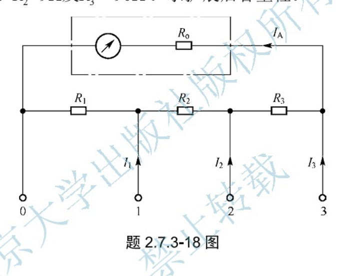
题 2.7.3-16 图

17. 如题 2.7.3-17 图所示是一磁电式微安表，已知表头电流为 100μA 时满量程，其内阻 $R_g = 1500\Omega$，今欲将其改装成量程为30V、100V、300V，试计算分压电阻 R_1、R_2及R_3 的值。



题 2.7.3-17 图

18. 多量程电流表如题 2.7.3-18 图所示，已知表头内阻 $R_o = 2300\Omega$，量程为 50μA，各分流电阻分别为 R_1=1Ω、R_2=9Ω及$R_3 = 90\Omega$。求扩展后各量程。



题 2.7.3-18 图

第 3 章　电路分析的基本方法

教学提示：电路分析问题，大体有两类基本方法：等效变换方法和电路方程方法。第 2 章主要是介绍了等效变换方法。本章将介绍电路的基本分析方法。所谓基本分析方法，就是方程分析法，是以电路元件的约束特性(VCR)和电路的拓扑约束特性(KCL、KVL)为依据，建立以支路电流或回路电流或节点电压等为变量的电路方程组，解出所求的电压、电流和功率。

本章内容以基尔霍夫定律为基础，逐一介绍电路分析的基本方法：支路电流法，网孔电流法，节点电压法，回路分析法，割集分析法，并在此基础上讨论非线性电路的分析、含有理想运算放大器电路的分析以及计算机辅助分析。

教学要求：本章要让学生掌握支路电流法，网孔电流法，节点电压法，回路分析法，割集分析法，并能够熟练应用这些方法对线性电路进行分析；了解非线性电路及其分析方法，能够分析一些简单的非线性电路；掌握理想运算放大器电路模型，并能够对含有理想运放的电路进行分析；了解计算机辅助分析的现状和分析软件，并能够利用现有的电路分析软件对简单的电路进行分析。

3.1　支路电流法

电路由电路元件连接而成，电路中各支路电流受到 KCL 约束，各支路电压受到 KVL 约束，同时，电路的电压和电流还要受到元件特性(如欧姆定律 $u = Ri$)的约束。电路的电压和电流都必须同时满足这两类约束关系。根据电路的结构和参数，列出反映这两类约束关系的并且独立的 KCL、KVL 和 VCR 方程(称为电路方程)，然后求解电路方程就能得到各电压和电流的解答。为此，本章首先要讨论一下 KCL 和 KVL 的独立方程的个数。

3.1.1　KCL 和 KVL 的独立方程数

对于一个电路，大家都知道各个节点的 KCL 关系和各个回路的 KVL 关系。那么对于一个电路有没有必要将每个节点的电流关系都写出来或者将所有回路的电压关系都写出来呢？先看下面这个例子。

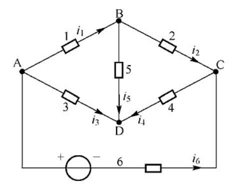


图 3.1　KVL、KCL 独立方程

图 3.1 所示电路，有 A、B、C、D 四个节点，1、2、3、4、5、6 六条支路，各支路的电流参考方向已示出，各支路的电压参考方向与电流参考方向取关联参考方向。

根据基尔霍夫定律，对节点 A、B、C、D 分别列出 KCL 方程，为

$$\left.\begin{aligned} i_1 + i_3 + i_6 &= 0 \\ -i_1 + i_2 + i_5 &= 0 \\ -i_2 + i_4 - i_6 &= 0 \\ -i_3 - i_4 - i_5 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

考查式(3.1)中的方程，若将这四个方程相加，得到等号两边都为零的结果，这说明这四个方程不是相互独立的；但任取其中三个方程相加，则可得到剩下的那个方程，即任意三个方程是相互独立的。可以证明：**对于具有 n 个节点的电路，任取其中的 $(n-1)$ 个节点可以列出 $(n-1)$ 个独立的 KCL 方程。**

对于图 3.1 所示的电路，可以查找出许多回路，例如：支路(1，5，3)、(1，2，4，3)、(2，4，5)、(1，2，6)、(3，4，6)等都构成回路。若对回路(1，2，4，3)、(3，4，6)、(1，5，3)按顺时针方向列出 KVL 方程

$$\left.\begin{aligned} u_1 + u_2 + u_4 - u_3 &= 0 \\ u_3 - u_4 - u_6 &= 0 \\ u_1 + u_5 - u_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

考查式(3.2)中的方程，因为其中任何一个都不能用另外两个进行加减运算得到，因此，三个方程是相互独立的。若再取这三个回路之外的任何一个回路，比如回路(1，2，6)，按顺时针方向列出 KVL 方程为

$$u_1 + u_2 - u_6 = 0 \tag{3.3}$$

显然，式(3.3)方程是不独立的，因为将式(3.2)中的三个方程进行运算可以得到该式。由此，可以得出结论：图 3.1 电路列出的 KVL 独立方程的个数是 3 个，把回路(1，2，4，3)、(3，4，6)、(1，5，3)称为一组独立回路。可以证明：**对于具有 n 个节点、b 条支路的电路，可以列出的 KVL 独立方程的个数是 $(b-n+1)$ 个，即有 $(b-n+1)$ 个独立回路。**

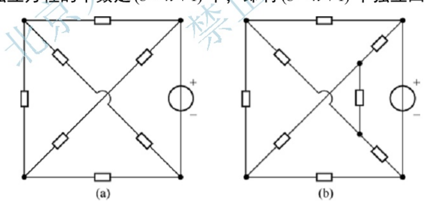


图 3.2　平面电路与非平面电路

能够画在一个平面上而没有支路交叉的电路称为平面电路，否则，称为非平面电路。图 3.2(a)是平面电路，图 3.2(b)是非平面电路。在平面电路中，把内部不存在任何支路和节点的回路称为网孔回路，简称网孔(mesh)。如图 3.1 所示的回路(1，5，3)、(2，4，5)和(3，4，6)都是网孔，而(1，2，4，3)、(1，2，6)等不是网孔。对于三个网孔，按顺时针方向可以列出 KVL 方程

回路(1，5，3)：　$u_1 + u_5 - u_3 = 0$

回路(2，4，5)：　$u_2 + u_4 - u_5 = 0$

回路(3，4，6)：　$u_3 - u_4 - u_6 = 0$

这是一组独立方程。平面电路的全部网孔是一组独立回路，因此回路的独立 KVL 方程数与网孔数相同。

通过这个例子可以得出结论：对于具有 n 个节点 b 条支路的电路，则有 $(b-n+1)$ 个网孔，其独立的 KCL 方程数为 $(n-1)$，独立的 KVL 方程数为 $(b-n+1)$，总共有 b 个独立方程。

3.1.2　支路电流法

根据上面的结论，对于具有 n 个节点 b 条支路的电路，就可以列出 $(n-1)$ 个线性无关的 KCL 方程和 $(b-n+1)$ 个线性无关的 KVL 方程。再加上 b 条支路的 VCR 方程，得到以 b 个支路电压和 b 个支路电流为变量的电路方程(简称为 $2b$ 方程)。$2b$ 方程是最原始的电路方程，是分析电路的基本依据。求解 $2b$ 方程可以得到电路的全部支路电压和支路电流。$2b$ 方程的缺点是方程数太多，给联立方程进行求解带来不便，因此必须设法减少方程和变量的数目。如果电路仅由独立电压源和线性电阻构成，只要将欧姆定律 $u=Ri$ 代入 KVL 方程中，消去全部电阻支路电压，变成以支路电流为变量的 KVL 方程，加上原来的 KCL 方程，便可得到以 b 个支路电流为变量的 b 个线性无关的方程组(称为支路电流方程)，这样，方程数也由 $2b$ 个减少到 b 个，只需求解 b 个方程，就能得到全部支路电流。**以支路电流为未知量，列出独立的 KCL、KVL 方程组，解方程以求得各支路的电流，再根据支路特性求得所需要的电压、功率等，这种分析电路的方法称作支路电流法**(branch current method)。

下面用具体的例子来说明支路电流法。

如图 3.3 所示的电路，各电压源的电压和各电阻均为已知，求各支路电流。把电压源与电阻的串联组合看做一条支路，则此电路有 2 个节点，3 条支路。各支路电流的参考方向如图 3.3 所示。

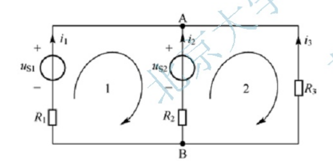


图 3.3　支路电流法举例

取节点 A，应用 KCL 建立独立的节点方程

$$i_1+i_2+i_3=0 \tag{3.4}$$

取网孔 1、2，选取绕行方向如图 3.3 中所示，应用 KVL 和支路的电压电流关系建立以支路电流为未知量的独立回路方程

$$\left.\begin{aligned}R_1i_1-u_{S1}+u_{S2}-R_2i_2=0\\-u_{S2}-R_3i_3+R_2i_2=0\end{aligned}\right\}$$

将已知电压移至方程右边并整理，有

$$\left.\begin{aligned}R_1i_1-R_2i_2=u_{S1}-u_{S2}\\R_2i_2-R_3i_3=-u_{S2}\end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

式(3.4)、式(3.5)就是以 i_1，i_2 和 i_3 为未知量的支路电流方程。

由式(3.4)、式(3.5)可以归纳出

$$\left.\begin{aligned}\sum i_k=0\\\sum R_ki_k=\sum u_{Sk}\end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

式中，R_ki_k 为回路中第 k 个支路的电阻上的电压。公式遍及回路中所有的支路，且当 i_k 电流方向与绕行方向一致时，前面取正号，不一致时，前面取负号。u_{Sk} 为回路中第 k 个支路

的电源电压，电源电压包括电压源也包括电流源两端的电压。在求代数和时当u_{Sk}与绕行方向一致时，前面取负号，不一致时，前面取正号。

值得指出的是，还可以采用以支路电压作为未知量的支路电压法(branch voltage method)来建立电路方程进行求解。

3.1.3　支路电流法举例

[例 3.1] 已知电路如图 3.4 所示，其中$E_1 = 15\text{V}$，$E_2 = 65\text{V}$，$R_1 = 5\Omega$，$R_2 = R_3 = 10\Omega$。试用支路电流法求R_1、R_2和R_3三个电阻上的电压。

[解] 在电路图上标出各支路电流的参考方向，如图 3.4 所示，选取绕行方向。应用 KCL 对节点 A 列 KCL 方程得：

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

对网孔回路列 KVL 方程：

$$I_1R_1 + I_3R_3 = E_1 \qquad I_2R_2 + I_3R_3 = E_2$$

代入已知数据解方程可得：

$$I_1 = \frac{7}{4}\text{A} \qquad I_2 = \frac{33}{8}\text{A} \qquad I_3 = \frac{19}{8}\text{A}$$

三个电阻上的电压电流方向选取一致，则三个电阻上的电压分别为

$$U_1 = I_1R_1 = \frac{35}{4}\text{V} \qquad U_2 = I_2R_2 = \frac{165}{4}\text{V} \qquad U_3 = I_3R_3 = \frac{38}{4}\text{V}$$

[例 3.2] 试用支路电流法，求图 3.5 所示电路中的电流I_1、I_2、I_3、I_4和I_5(只列方程不求解)。

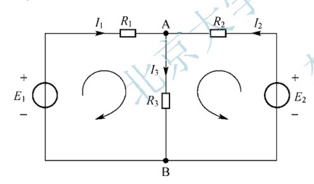


图 3.4　例 3.1 电路图

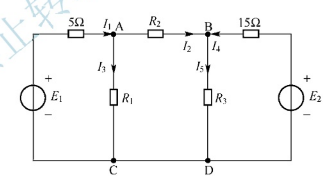


图 3.5　例 3.2 电路图

[解] 在电路图上标出各支路电流的参考方向，如图 3.5 所示，三个网孔回路均选取顺时针绕行方向。应用 KCL 和 KVL 列出方程

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

$$I_2 + I_4 - I_5 = 0$$

$$5I_1 + I_3R_1 = E_1$$

$$I_2R_2 + I_5R_3 - I_3R_1 = 0$$

$$-I_5R_3 - 15I_4 = -E_2$$

若给定参数，联立方程求解即可得到各支路电流。

[例 3.3] 对图 3.6 电路，试用支路电流法求各支路电流。

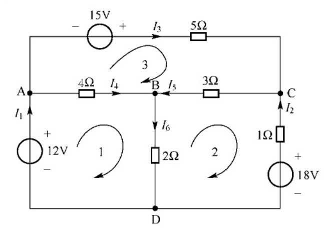


图 3.6　例 3.3 电路图

[解] 该电路的支路数为 6，节点数为 4。

(1) 设各个电流的参考方向如图所示，选择节点 A、B、C 为独立节点，各节点的 KCL 方程为

节点 A：$-I_1 + I_3 + I_4 = 0$

节点 B：$-I_4 - I_5 + I_6 = 0$

节点 C：$-I_2 - I_3 + I_5 = 0$

(2) 选择网孔为独立回路，设各回路的绕行方向均为顺时针方向，如图 3.6 所示，各回路的 KVL 方程为

回路 1：$4I_4 + 2I_6 = 12$

回路 2：$-I_2 - 3I_5 - 2I_6 = -18$

回路 3：$5I_3 - 4I_4 + 3I_5 = 15$

联立以上各式，求得各支路电流为

$$I_1 = 3\text{A} \qquad I_2 = 1\text{A} \qquad I_3 = 2\text{A}$$

$$I_4 = 1\text{A} \qquad I_5 = 3\text{A} \qquad I_6 = 4\text{A}$$

综上所述，可以得到支路电流法解题的一般步骤：

(1) **在电路图上标出设定的各支路电流及其参考方向；**

(2) **对 $(n-1)$ 个独立节点，根据 KCL 列出 KCL 方程；**

(3) **对 $(b-n+1)$ 个独立回路(一般选网孔)，根据 KVL 列出 KVL 方程；**

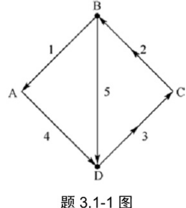
(4) **联立列出的 KCL 和 KVL 方程，求解出支路电流。**

思考与练习

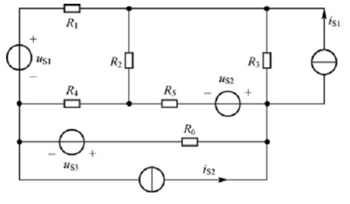
3.1-1　指出题 3.1-1 图中，KCL 和 KVL 独立方程各为多少？并在图上标出网孔。

(KCL 独立方程有 1 个；KVL 独立方程有 2 个。)

3.1-2　指出题 3.1-2 图电路的节点数和支路数：电压源和电阻的串联组合，电流源和电阻的并联组合作为一条支路处理。指出 KCL 和 KVL 独立方程各为多少？并在图上标出网孔。



题 3.1-1 图



题 3.1-2 图

(KCL 独立方程有 3 个；KVL 独立方程有 3 个。)

3.2　网孔电流法

利用支路电流法分析电路，需要列出的方程数与支路数目相同，如果支路过多，列出的方程仍然很多，势必加大计算量，为此需要再找到新的方法来进一步减少方程的数量。本节介绍网孔电流分析法。在引入网孔电流后，可以省去$(n-1)$个节点方程，从而减少了分析电路的计算量。

3.2.1　网孔电流

如图 3.7 所示，由R_1、R_5、R_4构成一个网孔回路，假想有一个电流i_{m1}沿着构成该网孔的各个支路循环流动，电流i_{m1}就称为网孔电流。同样，i_{m2}、i_{m3}是另外两个网孔回路的网孔电流。这里需要说明的是网孔电流实际上是不存在的，电路中真正存在的是支路电流。为了减少列方程的数目，而将支路电流借助于网孔电流来表示。网孔电流的参考方向，同时也是网孔回路的绕行方向。

以图 3.7 为例，图中给出了各支路电流的参考方向和元件参数。设三个网孔电流分别为i_{m1}、i_{m2}、i_{m3}，其流动参考方向为顺时针方向。如果知道了各网孔的电流值，就可以求得电路中任一条支路的电流，进而可以求得电路中任意两点间的电压，因为电路中的所有支路电流都可以用网孔电流来表示。例如R_1支路上的电流i_1就等于i_{m1}，即$i_1=i_{m1}$。R_2支路上的电流i_2就等于i_{m2}，但方向相反，所以$i_2=-i_{m2}$。如果某个支路是两个网孔的共有支路，则该支路上的电流就等于流经该支路的两个网孔电流的代数和。如$i_4=i_{m3}-i_{m1}$，$i_6=i_{m3}-i_{m2}$。因此可以说网孔电流是一组完备的变量。

网孔电流不但是一组完备的变量，而且还是相互独立的变量。因为图 3.7 电路中的网孔电流i_{m1}、i_{m2}、i_{m3}，已知其中任意两个求不出第三个。每一个网孔电流在流入某一节点时同时又从该节点流出，在列出 KCL 方程时，网孔电流会因此而相互抵消。KCL 对网孔电流并无要求，而各个网孔电流之间彼此独立不相关。所以说网孔电流是相互独立的变量。网孔电流的数目就是电路中网孔的个数。

以网孔电流为未知量，根据 KVL 列出网孔电压方程($\sum U=0$)，再根据已求得的网孔电流与支路电流的关系求解支路电流。这种分析电路的方法称为网孔电流法(mesh current method)。

3.2.2　网孔电流法方程

如图 3.7 所示，首先设定网孔电流的参考方向，并以此作为列出 KVL 方程的回路绕行方向。然后，根据 KVL 列出关于网孔电流的电路方程。

$$\left.\begin{aligned}
&R_1 i_{m1}+R_5(i_{m1}-i_{m2})+u_{S4}-R_4(i_{m3}-i_{m1})-u_{S1}=0\\
&R_2 i_{m2}+u_{S2}-R_6(i_{m3}-i_{m2})-R_5(i_{m1}-i_{m2})=0\\
&R_4(i_{m3}-i_{m1})-u_{S4}+R_6(i_{m3}-i_{m2})-u_{S3}+R_3 i_{m3}=0
\end{aligned}\right\}$$

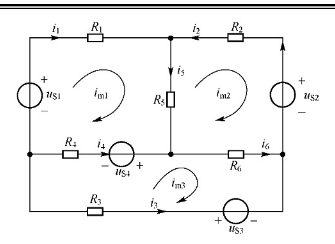


图 3.7　网孔电流法举例

整理得

$$\left.\begin{aligned}(R_1+R_4+R_5)i_{m1}-R_5i_{m2}-R_4i_{m3}&=u_{S1}-u_{S4}\\-R_5i_{m1}+(R_2+R_5+R_6)i_{m2}-R_6i_{m3}&=-u_{S2}\\-R_4i_{m1}-R_6i_{m2}+(R_3+R_4+R_6)i_{m3}&=u_{S3}+u_{S4}\end{aligned}\right\}\tag{3.7}$$

式(3.7)即是以网孔电流为求解对象的网孔电流方程，简称网孔方程。

写成矩阵形式得

$$\begin{bmatrix}R_1+R_4+R_5 & -R_5 & -R_4\\-R_5 & R_2+R_5+R_6 & -R_6\\-R_4 & -R_6 & R_3+R_4+R_6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_{m1}\\i_{m2}\\i_{m3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_{S1}-u_{S4}\\-u_{S2}\\u_{S3}+u_{S4}\end{bmatrix}\tag{3.8}$$

最后，可以归纳出网孔电流方程的一般形式

$$\begin{bmatrix}R_{11} & R_{12} & R_{13}\\R_{21} & R_{22} & R_{23}\\R_{31} & R_{32} & R_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_{m1}\\i_{m2}\\i_{m3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_{S11}\\u_{S22}\\u_{S33}\end{bmatrix}\tag{3.9}$$

式中，R_{ii} 称为自电阻，为第 i 个网孔中各支路的电阻之和，值恒为正。$R_{ij}(i\neq j)$称为互电阻，为第 i 个与第 j 个网孔之间公共支路的电阻之和，值可正可负；当相邻网孔电流在公共支路上流向一致时为正，不一致时为负(当各个网孔电流的参考方向均设为顺时针或逆时针时，R_{ij} 总为负值)。不含受控源的电路系数矩阵为对称矩阵。u_{Sii} 为第 i 个网孔中的等效电压源。其值为该网孔中各支路电压源电压值的代数和。当电压源方向与绕行方向一致时取负，不一致时取正。

由独立电流源和线性电阻构成的具有 m 个网孔电路，其网孔方程的一般形式为

$$\left.\begin{aligned}R_{11}i_{m1}+R_{12}i_{m2}+\cdots+R_{1m}&=u_{s11}\\R_{21}i_{m1}+R_{22}i_{m2}+\cdots+R_{2m}&=u_{s22}\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\\R_{m1}i_{m1}+R_{m2}i_{m2}+\cdots+R_{mm}&=u_{smm}\end{aligned}\right\}\tag{3.10}$$

3.2.3　网孔电流法举例

[例 3.4]　用网孔电流法求图 3.8 所示电路中各支路电流。

[解] 选定网孔电流的参考方向如图 3.8 所示，列出网孔方程

$$网孔\ a：(2+1+2)\times I_a - 2\times I_b - 1\times I_c = 6-18$$

$$网孔\ b：(2+6+3)\times I_b - 2\times I_a - 6\times I_c = 18-12$$

$$网孔\ c：(3+1+6)\times I_c - 1\times I_a - 6\times I_b = 25-6$$

整理后

$$5I_a - 2I_b - I_c = -12$$

$$-2I_a + 11I_b - 6I_c = 6$$

$$-I_a - 6I_b + 10I_c = 19$$

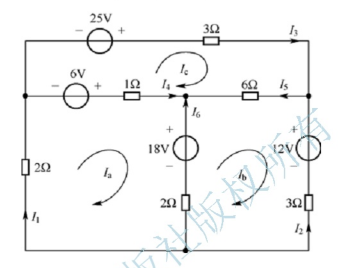


图 3.8　例 3.4 电路图

联立方程组解得

$$I_a = -1\text{A} \quad I_b = 2\text{A} \quad I_c = 3\text{A}$$

$$I_1 = I_a = -1\text{A} \quad I_2 = -I_b = -2\text{A} \quad I_3 = I_c = 3\text{A}$$

$$I_4 = I_a - I_c = -4\text{A} \quad I_5 = I_c - I_b = 1\text{A} \quad I_6 = I_b - I_a = 3\text{A}$$

从上述例题可以看到，网孔电流法适用于含有电压源的电路，电压源的电压可以直接写在方程式的右边。若电路中含有实际电流源，可以通过电源的等效转换，将电流源转换成电压源处理。如果电路中含有理想电流源，不能转换成电压源则应通过设电流源两端电压，或直接选理想电流源为网孔电流的方法，列方程求解。

[例 3.5] 电路如图 3.9 所示，列出网孔方程。

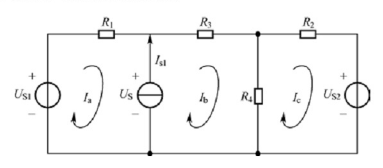


图 3.9　例 3.5 电路图

[解] 设网孔 I_a、I_b、I_c 的参考方向如图 3.9 所示，并设电流源 I_{S1} 两端的电压为 U_S，列出网孔方程

$$网孔\ a：R_1 I_a = U_{S1} - U_S$$

$$网孔\ b：(R_3 + R_4)I_b - R_4 I_c = U_S$$

$$网孔\ c：(R_2 + R_4)I_c - R_4 I_b = -U_{S2}$$

由于所设U_S为未知量，列出的式子中，三个方程中有四个未知量，要有唯一解还需要再寻找一个等式作为辅助方程，根据电流关系可列出

$$I_{S1} = I_b - I_a$$

[例 3.6] 列出如图 3.10 所示的网孔方程。

[解] 设网孔电流及参考方向如图 3.10 所示。电路有一个独立电压源，还有一个电压控制的电压源，受控源的控制量为u_2，列网孔电流方程时先将受控电压源mu_2当作独立电压源，按照（3.10）所概括的规则写出“初步”的网孔方程，再把受控源的控制量用网孔电流表示。网孔方程为

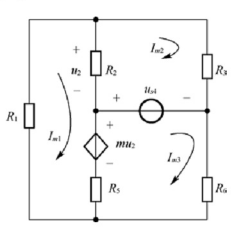


图 3.10　例 3.6 电路图

$$网孔\ 1：(R_1 + R_2 + R_5)I_{m1} - R_2 I_{m2} - R_5 I_{m3} = -mu_2$$

$$网孔\ 2：-R_2 I_{m1} + (R_2 + R_3)I_{m2} = u_{s4}$$

$$网孔\ 3：-R_5 I_{m1} + (R_5 + R_6)I_{m3} = mu_2 - u_{s4}$$

$$辅助方程：u_2 = R_2(I_{m1} - I_{m2})$$

含有受控源的电路在列出网孔电压方程时，首先将受控源当做独立源一样看待写出方程式。但方程中会多出一个未知量——受控源的控制量，因此，需要再寻找一个控制量与网孔电流之间的关系式作为辅助方程。

[例 3.7] 电路如图 3.11(a)所示，求 4Ω 电阻上的电流。

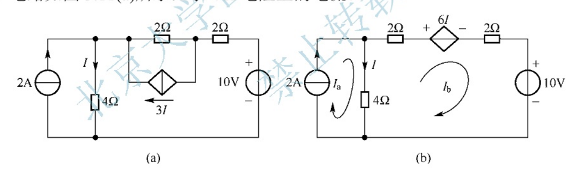


图 3.11　例 3.7 电路图

[解] 首先将受控源按独立源处理，将受控电流源等效转换为受控电压源，如图 3.11(b)所示，设网孔 a 的电流$I_a = 2\text{A}$，即为理想电流源的电流。网孔 b 的电流I_b。列出网孔方程

$$(2 + 2 + 4)I_b - 4I_a = -6I - 10$$

辅助方程从图中得到

$$I = I_a - I_b = 2 - I_b$$

整理并求得

$$I_b = -7\text{A} \qquad I = 9\text{A}$$

综上所述，运用网孔电流法列写方程时需要注意：

(1) 选择网孔电流的参考方向时，一般都取顺时针或都取逆时针方向，这样做的好处是互电阻皆取负号。如果各个网孔电流参考方向不一致，注意列写方程时互电阻的符号有正也有负。

(2) 当电路中含有电流源时，可将含有电流源的支路改画到边沿支路上，并将电流源电流设为网孔电流；若不能改画到边沿支路，可设电流源两端电压，列出方程时将这个电压包括在内，同时需要再寻求该电流源电流与相关网孔电流的关系方程，作为辅助方程。

(3) 当电路中含有受控源时，首先把受控源当做独立源一样去处理。若受控源的控制量不是网孔电流时，必须再把控制量用网孔电流来表示，找出这个关系式，作为辅助方程。

特别要注意，以上介绍的网孔电流法仅适用于平面电路。

我们可以总结出网孔电流法的解题步骤：

(1) 首先在电路图中，标出网孔电流及其参考方向。通常设网孔电流的方向均为顺时针(或逆时针)，使网孔方程中互电阻均取“−”号，便于记忆；

(2) 观察电路，直接列出网孔方程；

(3) 求解网孔方程，得到各网孔电流；

(4) 根据支路电流与网孔电流的关系，可求得各支路电流。支路电流与网孔电流方向相同的取正，方向相反取负；

(5) 由支路的伏安特性，可计算出各支路上的电压。

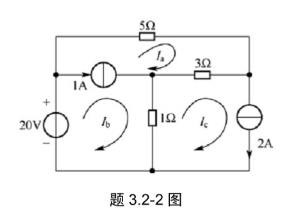
思考与练习

3.2-1　网孔电流与支路电流有什么区别？

(为了减少列方程的数目，假想在电路的每个网孔里有一个电流沿着构成该网孔的各个支路循环流动，这一假想的电流就称为网孔电流。网孔电流实际上是不存在的，电路中真正存在的是支路电流，而支路电流可以用网孔电流的合成来表示。)

3.2-2　如题 3.2-2 图所示，求网孔电流。

($I_a = 3\text{A}$，$I_b = 4\text{A}$，$I_c = 2\text{A}$)



题 3.2-2 图

3.2-3　在列出含有电流源的网孔的网孔电流方程时，为什么要考虑电流源的电压？

(网孔电流法适用于含有电压源的电路，电压源的电压可以直接写在网孔方程式中。当电路中存在电流源时，不能用网孔电流方程式直接建立含有电流源的方程，其原因是没有考虑电流源的电压。若电路中含有实际电流源，可以通过电源的等效转换，将电流源转换成电压源处理。如果电路中含有理想电流源，不能转换成电压源则应通过设电流源两端电压，或直接选理想电流源为网孔电流的方法，列方程求解。)

3.3　节点电压法

网孔电流法以网孔电流为未知量只需列出 $(b-n+1)$ 个 KVL 方程就可以求解电路。本节学习的节点电压法将把节点电压作为未知量，只需列出 $(n-1)$ 个 KCL 方程，就可得到全

部节点电压，然后借助节点电压可求出各支路电压，根据 VCR 方程可求得各支路电流。节点电压法和网孔电流法都是分析电路的基本方法。

3.3.1　节点电压

当用电压表测量电子电路各元件端钮间电压时，常将底板或机壳作为测量基准，把电压表的公共端或“−”端接到底板或机壳上，用电压表的另一端依次测量各元件端钮上的电压。测出各端钮相对基准的电压后，任意两端钮间的电压，可用相应两个端钮相对基准电压之差的方法计算出来。与此相似，在具有 n 个节点的连通电路(模型)中，可以选其中一个节点作为基准节点(称为参考节点)，其余 $(n-1)$ 个节点相对基准节点的电压，称为节点电压(node voltage)。例如在图 3.12 电路中，共有 4 个节点，选节点 0 作基准节点，用接地符号表示，其余三个节点电压分别为 u_{n1} 、 u_{n2} 和 u_{n3}，如图 3.12 所示。将基准节点作为电位参考点或零电位点，各节点电压就等于各节点电位，即 $u_{n1}=v_1$，$u_{n2}=v_2$，$u_{n3}=v_3$。这些节点电压不能构成一个闭合路径，不能组成 KVL 方程，不受 KVL 约束，是一组完备独立的电压变量。任一支路电压是其两端节点电位之差或节点电压之差，由此可求得全部支路电压。

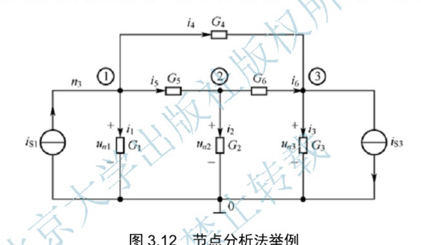


图 3.12　节点分析法举例

例如，图 3.12 所示电路各支路电压可用节点电压表示

$$u_1=u_{n1} \qquad u_2=u_{n2}$$
$$u_3=u_{n3} \qquad u_4=u_{n1}-u_{n3}$$
$$u_5=u_{n1}-u_{n2} \qquad u_6=u_{n2}-u_{n3}$$

以节点电压为未知量，将各支路电流用节点电压表示，列出 $(n-1)$ 个 KCL 方程，求出各节点电压，进而求得各支路电压、电流和功率，这种分析电路的方法称作节点电压法(node voltage method)。

3.3.2　节点方程

如图 3.12 所示电路，对电路的三个独立节点列出 KCL 方程

$$\left.\begin{aligned} i_1+i_4+i_5&=i_{S1}\\ i_2-i_5+i_6&=0\\ i_3-i_4-i_6&=-i_{S3}\end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

这是一组线性无关的方程。列出用节点电压表示的电阻各 VCR 方程

$$\left.\begin{aligned} i_1 &= G_1 u_{n1} \\ i_2 &= G_2 u_{n2} \\ i_3 &= G_3 u_{n3} \\ i_4 &= G_4 (u_{n1} - u_{n3}) \\ i_5 &= G_5 (u_{n1} - u_{n2}) \\ i_6 &= G_6 (u_{n2} - u_{n3}) \end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

式中，G_1、G_2、G_3、G_4、G_5、G_6 为各电阻的电导。

将式(3.12)代入式(3.11)中，经过整理后得到

$$\left.\begin{aligned} (G_1 + G_4 + G_5)u_{n1} - G_5 u_{n2} - G_4 u_{n3} &= i_{S1} \\ -G_5 u_{n1} + (G_2 + G_5 + G_6)u_{n2} - G_6 u_{n3} &= 0 \\ -G_4 u_{n1} - G_6 u_{n2} + (G_3 + G_4 + G_6)u_{n3} &= -i_{S3} \end{aligned}\right\} \tag{3.13}$$

式(3.13)就是图 3.12 电路以三个节点电压为未知量的节点电压法方程，简称节点方程。写成一般形式

$$\left.\begin{aligned} G_{11}u_{n1} + G_{12}u_{n2} + G_{13}u_{n3} &= i_{S11} \\ G_{21}u_{n1} + G_{22}u_{n2} + G_{23}u_{n3} &= i_{S22} \\ G_{31}u_{n1} + G_{32}u_{n2} + G_{33}u_{n3} &= i_{S33} \end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

式中，G_{11}、G_{33}、G_{22} 称为节点自电导，它们分别是各节点全部电导的总和。此例中 $G_{11} = G_1 + G_4 + G_5$，$G_{22} = G_2 + G_5 + G_6$，$G_{33} = G_3 + G_4 + G_6$。$G_{ij}(i \neq j)$ 称为节点 i 和 j 的互电导，是节点 i 和 j 间电导总和的负值，此例中 $G_{12} = G_{21} = -G_5$，$G_{13} = G_{31} = -G_4$，$G_{23} = G_{32} = -G_6$。i_{S11}，i_{S22}，i_{S33} 是流入该节点全部电流源电流的代数和。此例中 $i_{S11} = i_{S1}$，$i_{S22} = 0$，$i_{S33} = -i_{S3}$。

综上可见，由独立电流源和线性电阻构成电路的节点方程，其系数很有规律，可以用观察电路图的方法直接写出节点方程。

由独立电流源和线性电阻构成的具有 n 个节点的连通电路，其节点方程的一般形式为

$$\left.\begin{aligned} G_{11}u_{n1} + G_{12}u_{n2} + \cdots + G_{1(n-1)}u_{n(n-1)} &= i_{S11} \\ G_{21}u_{n1} + G_{22}u_{n2} + \cdots + G_{2(n-1)}u_{n(n-1)} &= i_{S22} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad &\vdots \\ G_{(n-1)1}u_{n1} + G_{(n-1)2}u_{n2} + \cdots G_{(n-1)(n-1)}u_{n(n-1)} &= i_{S(n-1)(n-1)} \end{aligned}\right\} \tag{3.15}$$

3.3.3 节点电压法举例

[例 3.8] 用节点电压法求图 3.13 电路中各电阻支路电流。

[解] 用接地符号标出参考节点，标出两个节点电压 u_{n1} 和 u_{n2} 的参考方向，如图 3.13 所示。用观察法列出节点方程

$$(1+1)u_{n1} - (1)u_{n2} = 5\text{A}$$
$$-(1)u_{n1} + (1+2)u_{n2} = -10\text{A}$$

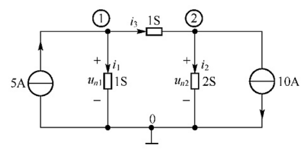


图 3.13　例 3.8 电路图

整理得到

$$2u_{n1}-u_{n2}=5\text{A}$$
$$-u_{n1}+3u_{n2}=-10\text{A}$$

解得各节点电压为

$$u_{n1}=1\text{V}\qquad u_{n2}=-3\text{V}$$

选定各电阻支路电流参考方向如图所示，可求得

$$i_1=1\text{A}\qquad i_2=-6\text{A}\qquad i_3=4\text{A}$$

[例 3.9] 用节点电压法求图 3.14(a)电路各支路电压。

[解] 先将图 3.14(a)电阻与电压源串联支路等效变换为电流源与电阻并联，电阻用电导表示，参考节点和节点电压如图 3.14(b)所示。设定节点电压 u_{n1} 为 u_1，节点电压 u_{n2} 为 u_2，节点电压 u_{n3} 为 u_3。用观察法列出 3 个节点方程

$$(2+2+1)u_1-(2)u_2-(1)u_3=6\text{A}-18\text{A}$$
$$-(2)u_1+(2+3+6)u_2-(6)u_3=18\text{A}-12\text{A}$$
$$-(1)u_1-(6)u_2+(1+6+3)u_3=25\text{A}-6\text{A}$$

整理得到

$$5u_1-2u_2-u_3=-12\text{A}$$
$$-2u_1+11u_2-6u_3=6\text{A}$$
$$-u_1-6u_2+10u_3=19\text{A}$$

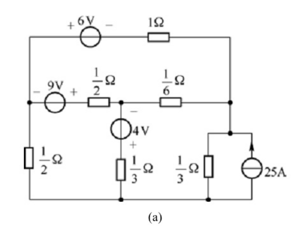
解得各节点电压为

$$u_1=-1\text{V}\qquad u_2=2\text{V}\qquad u_3=3\text{V}$$

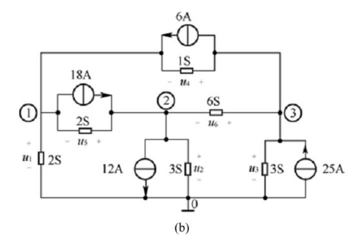
求得另外三个支路电压为

$$u_4=u_3-u_1=4\text{V}\qquad u_5=u_1-u_2=-3\text{V}\qquad u_6=u_3-u_2=1\text{V}$$

当电路中存在独立电压源时，不能用式(3.14)建立含有电压源节点的方程，其原因是没有考虑电压源的电流。若有电阻与电压源串联单口，可以先等效变换为电流源与电阻并联单口后，再用式(3.14)建立节点方程。若没有电阻与电压源串联，则应增设电压源的电流变量来建立节点方程。此时，由于增加了电流变量，需补充电压源电压与节点电压关系的方程。



(a)



(b)

图 3.14　例 3.9 电路图

综上所述，对于由独立电压源，独立电流源和电阻构成的电路来说，其节点方程的一般形式应改为以下形式

$$\left.\begin{aligned}
&G_{11}u_{n1}+G_{12}u_{n2}+\cdots+G_{1(n-1)}u_{n(n-1)}+i_{\mathrm{uS}11}=i_{\mathrm{S}11}\\
&G_{21}u_{n1}+G_{22}u_{n2}+\cdots+G_{2(n-1)}u_{n(n-1)}+i_{\mathrm{uS}22}=i_{\mathrm{S}22}\\
&\quad\cdots\qquad\cdots\qquad\qquad\cdots\qquad\qquad\cdots\qquad\cdots\\
&G_{(n-1)1}u_{n1}+G_{(n-1)2}u_{n2}+\cdots+G_{(n-1)(n-1)}u_{n(n-1)}+i_{\mathrm{uS}(n-1)(n-1)}=i_{\mathrm{S}(n-1)(n-1)}
\end{aligned}\right\}\tag{3.16}$$

式中，$i_{\mathrm{uS}kk}$ 是与第 k 个节点相连的全部电压源电流的代数和，其电流参考方向流出该节点的取正号，相反的取负号。由于变量的增加，需要补充这些电压源与相关节点电压关系的方程，其一般形式如下

$$u_{\mathrm{S}k}=u_{ni}-u_{nj}$$

式中，u_{ni} 是连接到电压源参考极性“+”端的节点电压，u_{nj} 是连接到电压源参考极性“−”端的节点电压。

[例 3.10] 用节点电压法求图 3.15(a)电路的节点电压 u 和支路电流 i_1、i_2。

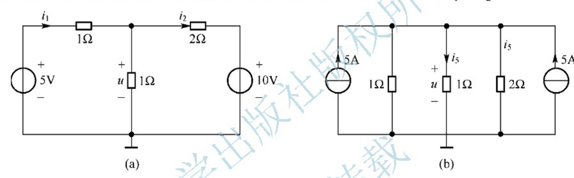


图 3.15　例 3.10 电路图

[解] 先将电压源与电阻串联等效变换为电流源与电阻并联，如图 3.15(b)所示。对节点电压 u 来说，图 3.15(b)与图 3.15(a)等效。只需列出一个节点方程。

$$(1+1+0.5)u=5\mathrm{A}+5\mathrm{A}$$

解得

$$u=4\mathrm{V}$$

按照图(a)电路可求得电源 i_1 和 i_2：

$$i_1=1\mathrm{A}\qquad i_2=-3\mathrm{A}$$

[例 3.11] 用节点电压法求图 3.16 电路的节点电压。

[解] 由于14V 电压源连接到节点①和参考节点之间，节点①的节点电压成为已知量，即 $u_1=14\mathrm{V}$，可以不列出节点①的节点方程。考虑到 8V 电压源电流 i_6，列出②、③的两个节点方程为

$$-(1)u_1+(1+0.5)u_2+i_6=3\mathrm{A}$$

$$-(0.5)u_1+(1+0.5)u_3-i_6=0$$

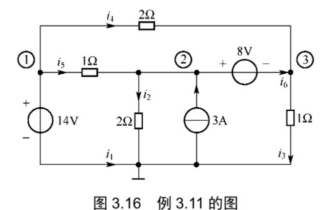


图 3.16　例 3.11 的图

补充方程

$$u_2 - u_3 = 8\text{V}$$

代入$u_1 = 14\text{V}$，联立方程解得：

$$u_2 = 12\text{V} \qquad u_3 = 4\text{V} \qquad i_6 = -1\text{A}$$

由此例可见，当参考节点选在电压源的一端时，电压源另一端的节点电压成为已知量，此时可以不列该节点的节点方程。

另外，解题过程中增加电压源电流变量建立的一组电路方程，称为改进的节点方程。它扩大了节点方程适用的范围，为很多计算机电路分析程序采用。

[例 3.12] 如图 3.17 所示电路，求i_1和i_2。

[解] 选定 0 为参考点，令独立节点①、②的节点电压为u_1和u_2，如图 3.17 所示。按图 3.17，列出节点方程：

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)u_1 - \frac{1}{4}u_2 = 2 - 0.5i_2$$

$$-\frac{1}{4}u_1 + \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)u_2 = 0.5i_2 + \frac{4i_1}{4}$$

由图可见，控制变量i_1、i_2与节点电压的关系为

$$i_1 = \frac{u_1 - u_2}{4}, \quad i_2 = \frac{u_2}{2}$$

由上面几个式子可解出u_1=6V，u_2=2V。将它们代入上式，得$i_1 = 0.5\text{A}$, $i_2 = 1\text{A}$。

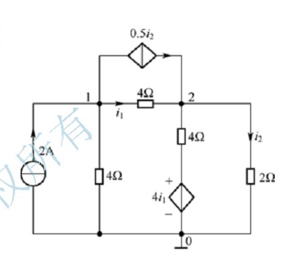


图 3.17　例 3.12 电路图

运用节点电压法列出方程时需要注意：

(1) 在列出节点电压方程时，把实际电压源模型等效成实际电流源模型。并注意互电导的符号为负。

(2) 当电路中含有理想电压源时，将电压源电压设为节点电压；若不能设为节点电压，可设电压源支路上的电流，列出方程时将这个电流包括在内，同时需要再寻求该电压源电压与相关节点电压的关系方程，作为辅助方程。

(3) 当电路中含有受控源时，首先把受控源当做独立源一样去处理。若受控源的控制量不是节点电压时，必须再把控制量用节点电压来表示，找出这个关系式，作为辅助方程。

综上所述，可以总结出节点分析法的解题步骤：

(1) 指定连通电路中任一节点为参考节点，用接地符号表示。标出各节点电压，其参考方向总是独立节点为“+”，参考节点为“−”；

(2) 标出n个节点，用观察法列出$(n-1)$个节点方程；

(3) 求解节点方程，得到各节点电压；

(4) 选定支路电流和支路电压的参考方向，计算各支路电流和支路电压。

思考与练习

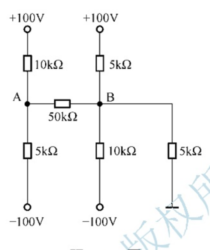
3.3-1　你能改变图 3.16 电路参考节点的选择，只列一个节点方程求出电阻支路电流吗？

3.3-2　为什么在列出含电压源节点的节点方程中，必须考虑电压源电流？

(节点电压法适用于含有电流源的电路，当电路中存在独立电压源时，不能用节点电压方程式建立含有电压源节点的方程，其原因是没有考虑电压源的电流。若有电阻与电压源串联单口，可以先等效变换为电流源与电阻并联单口后，再建立节点方程。若没有电阻与电压源串联，则应增加电压源的电流变量来建立节点方程，由于增加了电流变量，需补充电压源电压与节点电压关系的方程。)

3.3-3　如题 3.3-3 图所示，试用节点分析法求 B 点的电位。

($u_A = -30.1\text{V}$， $u_B = 18.1\text{V}$)



题 3.3-3 图

3.4　回路分析法和割集分析法

3.4.1　图论基础

某一个具体电路之所以具有某种电性能，除了取决于组成该电路的各个元件电性能以外，还取决于这些元件的互相连接，即该电路的结构。显然，结构确定以后，单纯描述这个电路结构所服从的 KCL 和 KVL 方程时，一个元件电路就可以抽象成一个线图。例如图 3.18(a)所示电路就可以抽象成图 3.18(b)。另外，图 3.18(c)所示电路也就可以抽象成图 3.18(b)，与如图 3.18(a)所示电路形成的线图一样，则图 3.18(a)所示电路与图 3.18(c)所示电路为同构电路。先了解图论的几个基本概念。

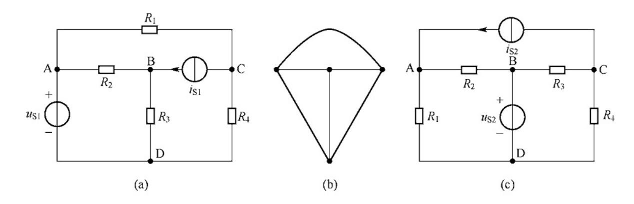


图 3.18　电路抽象成线图举例

图：将电路图中的支路用线条表示，节点保留，所得到的图称为原图的图，以 G 表示。支路、节点分属两个集合，支路必须落在节点上。当移去节点时，与该点相联的支路全部

移去。当移去支路时，节点予以保留。

有向图：标出各支路电压、电流关联参考方向的图，如图 3.19 所示。

子图：若图 G_1 的每个节点和每条支路也是图 G 的节点和支路，则称图 G_1 为图 G 的一个子图。如图 3.20(a)、图 3.20(b)所示均为原图 3.19 的子图。

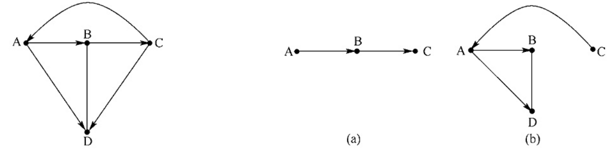


图 3.19　有向图举例　　　　图 3.20　图 3.19 的子图

连通图：当图 G 中任意两个节点之间至少存在一条由支路所构成的路径时，称为连通图，如图 3.19；反之称为非连通图，如图 3.21 所示电路。

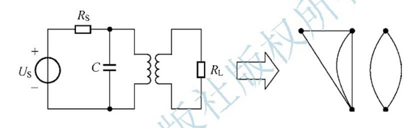


图 3.21　非连通图举例

树：树是图论中一个非常重要的概念。包含连通图 G 中所有的节点，但不形成回路的连通子图，称为图 G 的树。在图 3.22 中，(b)，(c)，(d)都是(a)的树。可见，同一个图有许多种树。由树的定义可知，树有三个特点：(1)树是连通图，(2)树包含了图的全部节点，(3)树不能含有回路。

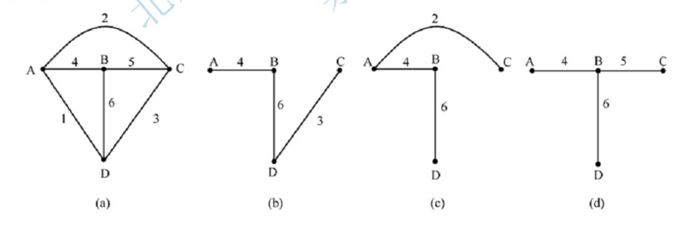


图 3.22　树举例

组成树的支路称为树支，不属于树的支路称为连支。例如图 3.22(b)选支路{4，6，3}为树支，则支路 1，2，5 为连支，图 3.22(c)选支路{2，4，6}为树支，则支路{1，3，5}为连支。

如果连通图 G 有 n 个节点、b 条支路，则它的任一种树的树支数都为 $(n-1)$，连支数都为 $(b-n+1)$。

3.4.2 回路分析法

网孔电流法仅适用于平面电路。对于非平面电路来说就不能以网孔法来分析，只能用回路法。回路法适用于平面和非平面电路。

回路分析法实际是基本回路电流分析法。先引入基本回路的概念，我们选定树后，每次只接上一条连支，该连支与其他有关的树支组成一个闭合回路，此回路称为“基本回路”，由于基本回路中只有一条连支，连支电流在基本回路流动，称为基本回路电流，基本回路电流的参考方向取与连支电流一致的参考方向。设网络的图有 n 个节点，b 条支路，则回路分析法中基本回路电流的数目应与连支数相等，为 $(b-n+1)$，基本回路电流是一组独立的求解变量，我们对这些基本回路列 KVL 方程就会得到 $(b-n+1)$ 个独立方程。

回路电流分析法方程列写的规律与网孔电流法相同。

以回路电流为未知量，根据 KVL 列出独立的回路电压方程，然后联立求得回路电流，进而求出各支路电流、电压和功率，这种分析电路的方法就是回路分析法(Loop analysis)。

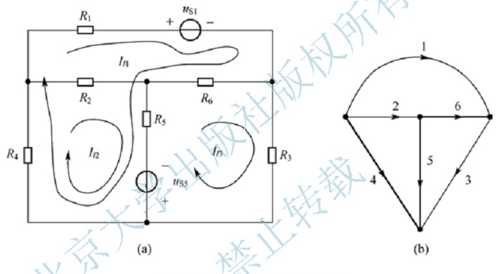


图 3.23 回路电流分析举例

下面再以图 3.23 为例对回路分析法作具体介绍。

图 3.23(a)图选支路 4，5，6 为树支，连支 1 与树支 6，5，4 组成基本回路 1，基本回路电流为 I_{l1}；连支 2 与树支 5，4 组成基本回路 2，基本回路电流为 I_{l2}；连支 3 与树支 5，6 组成基本回路 3，基本回路电流为 I_{l3}。利用 KVL 和欧姆定律列写三个回路方程：

$$(R_1+R_4+R_5+R_6)I_{l1}+(R_4+R_5)I_{l2}-(R_5+R_6)I_{l3}=-u_{S1}+u_{S5} \tag{3.17}$$

$$(R_4+R_5)I_{l1}+(R_2+R_4+R_5)I_{l2}-R_5I_{l3}=u_{S5} \tag{3.18}$$

$$-(R_5+R_6)I_{l1}-R_5I_{l2}+(R_3+R_5+R_6)I_{l3}=-u_{S5} \tag{3.19}$$

观察方程可以得出网孔电流法相类似的规律：

式(3.17)中，I_{l1} 前的系数 $(R_1+R_4+R_5+R_6)$ 是基本回路 1 中所有电阻之和，称它为基本回路 1 的自电阻，用 R_{11} 表示；I_{l2} 前的系数 (R_4+R_5) 是基本回路 1 和基本回路 2 公共支路上的电阻，称它为两个基本回路的互电阻，用 R_{12} 表示，由于流过 (R_4+R_5) 的两个基本回路电流方向相同，(R_4+R_5) 前为正号；I_{l3} 前的系数 (R_5+R_6) 是基本回路 1 和基本回路 3 公共支路上的电阻，用 R_{13} 表示，由于流过 (R_5+R_6) 的两个基本回路电流方向相反，(R_5+R_6) 前为负号，等式右端 $-u_{S1}+u_{S5}$ 表示基本回路 1 中电压源的代数和，用 u_{S11} 表示，u_{S11} 中各电压

源的取号法则是，电压源的电压降方向与回路电流方向一致的取负号，反之取正号。用同样的方法可以得出式(3.18)和式(3.19)。

由此得出回路分析法的标准形式

$$\begin{aligned} R_{11}i_{l1} + R_{12}i_{l2} + R_{13}i_{l3} &= u_{S11} \\ R_{21}i_{l1} + R_{22}i_{l2} + R_{23}i_{l3} &= u_{S22} \\ R_{31}i_{l1} + R_{32}i_{l2} + R_{33}i_{l3} &= u_{S33} \end{aligned} \tag{3.20}$$

由于回路分析法是建立在树的基础上的一种分析方法，而树的选取方法有很多种，但为了使解题方便、简单，应选择一棵“合适的树”，树应尽可能这样选：

(1) 把电压源支路选为树支；

(2) 把受控源的电压控制量选为树支；

(3) 把电流源选取为连支；

(4) 把受控源的电流控制量选为连支。

[例 3.13] 用回路分析法求解图 3.24 所示电路。

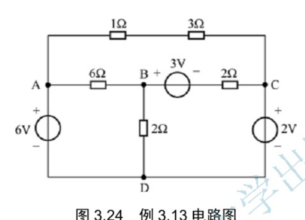


图 3.24　例 3.13 电路图

[解] 图 3.24 电路的拓扑图如图 3.25(a)所示，选支路 AD、DC、CB 为树支。选出的树如图 3.25(a)中粗线所示，回路电流 i_1、i_2、i_3 如图 3.25(b)所示。为方便方程的建立，将树以及回路电流标注在原电路上，如图 3.25(b)所示。

沿基本回路建立 KVL 方程得

$$\begin{aligned} (2+2)i_1 + 2i_2 &= -3-2 \\ 2i_1 + (2+6)i_2 &= 6-3-2 \\ (1+3)i_3 &= 6-2 \end{aligned} \tag{3.21}$$

联立以上方程求解得

$$i_1 = -1.5\text{A} \qquad i_2 = 0.5\text{A} \qquad i_3 = 1\text{A}$$

如按图 3.25(c)所示，选支路 AB，BC，BD 为树支，则所选的基本回路电流正好是网孔电流，回路电压方程正好是网孔电压方程，所以网孔电流法可以说是回路分析法的一个特例。

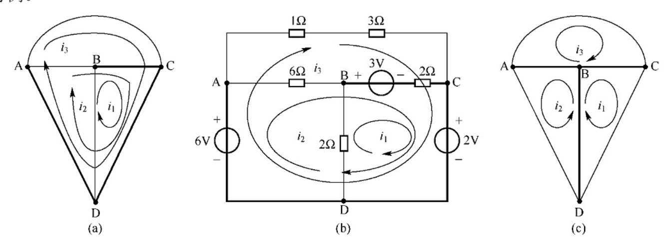


图 3.25　例题 3.13 的拓扑图

[例 3.14] 试用回路电流法求下图 3.26(a)所示电路的电压 u。

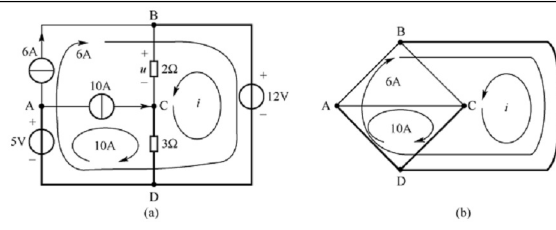


图 3.26　例 3.14 电路图

[解] 图 3.26(b)是图 3.26(a)的拓扑图，选择支路 AD、DB、DC 为树，即图中粗线为树。回路电流有三个，分别为 6A、10A 和 i。由于两个电流源电流被选作回路电流，故只需要列出 i 回路的 KVL 方程即可，为

$$(2+3)i+3\times10=12 \tag{3.22}$$

解得

$$i=-3.6\text{A}$$

所以

$$u=2i=-7.2\text{V}$$

由以上的电路分析可知，当一个电路的电流源较多时，在选择了一个合适的“树”的情况下，采用回路分析法求解电路，可以使求解变量大为减少。因此回路分析法最适合电流源多的电路分析。

综上所述，可以总结出回路法的一般步骤：

(1) 确定一个树选定 $(b-n+1)$ 个基本回路，并确定其绕行方向；

(2) 对 $(b-n+1)$ 个基本回路，以回路电流为未知量，列出 KVL 方程；

(3) 求解上述方程，得到 $(b-n+1)$ 个回路电流；

(4) 求各支路电流(用回路电流表示)。

3.4.3　割集分析法

割集是图论中一个非常重要的概念。若从连通图 G 中移去(或割去)属于 S 的所有支路，则图 G 恰好被分成两个互相分离的部分，但只要少移去其中的一条支路，则图仍然是连通的，这样的支路集 S 称为割集。图 3.27(b)中的支路集{1，4，5}、{5，2，6}、{4，3，2}、{3，4，5，6}等都是割集。

由一条树支和几条连支构成的割集为基本割集。对于有 n 个节点的连通图，其树支数为 $(n-1)$，故有 $(n-1)$ 个基本割集。在图 3.27(b)中，有 4 个节点，则每种树对应 3 个基本割集，如选支路 1，3，2 为树支，则基本割集就是 C_1、C_2、C_3。

割集分析法与回路分析法一样，是建立在“树”的基础上的一种分析方法。**割集分析法是将树支电压作为一组独立的求解变量，根据基本割集建立 KCL 方程，求解电流、电压和功率的电路分析方法。割集分析法又称为割集电压分析法**(cnt-set analysis)。割集分析法的选树原则与回路分析法相同，即尽可能将电压源及电压控制量选为树支，电流源及电流控制量选为连支。

设网络的图有 n 个节点，b 条支路，则割集分析法中基本割集的数目与树支数相等，为 $(n-1)$ 个，树支电压变量也为 $(n-1)$ 个。因此当电路中电压源支路较多时，采用割集分析法最为有效。

下面通过例题说明割集分析法的求解过程。

如图 3.27(a)所示的不含受控电源的电路为例，电路的有向图如图 3.27(b)所示，选择{1、2、3}支路为树，各基本割集如图 3.27(b)所示。写出每个基本割集的 KCL 方程：

$$\left.\begin{aligned} c_1\text{：}\ & i_1+i_4+i_5=0 \\ c_2\text{：}\ & i_{S2}+i_5-i_6=0 \\ c_3\text{：}\ & i_3-i_4-i_5+i_6=0 \end{aligned}\right\} \tag{3.23}$$

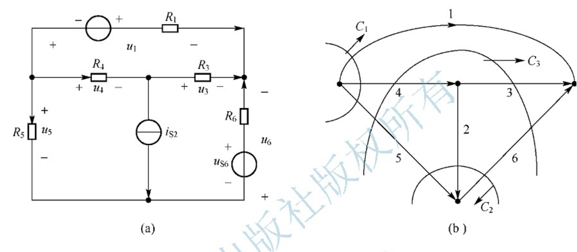


图 3.27　割集分析法举例

为得出以树支电压 u_1、u_2、u_3 为求解变量的网络方程，先写出用支路电压表示的支路电流方程，再用树支电压表示各支路电压：

$$\left.\begin{aligned} i_1 &= \frac{u_1+u_{S1}}{R_1}=G_1(u_1+u_{S1}) \\ i_3 &= \frac{u_3}{R_3}=G_3u_3 \\ i_4 &= \frac{u_4}{R_4}=\frac{u_1-u_3}{R_4}=G_4(u_1-u_3) \\ i_5 &= \frac{u_5}{R_5}=\frac{u_1+u_2-u_3}{R_5}=G_5(u_1+u_2-u_3) \\ i_6 &= \frac{u_{S6}-u_2+u_3}{R_6}=G_6(u_{S6}-u_2+u_3) \end{aligned}\right\} \tag{3.24}$$

将式(3.24)代入式(3.23)，有

$$\left.\begin{aligned} & G_1(u_1+u_{S1})+G_4(u_1-u_3)+G_5(u_1+u_2-u_3)=0 \\ & i_{S2}+G_5(u_1+u_2-u_3)-G_6(u_{S6}-u_2+u_3)=0 \\ & G_3u_3-G_4(u_1-u_3)-G_5(u_1+u_2-u_3)+G_6(u_{S6}-u_2+u_3)=0 \end{aligned}\right\} \tag{3.25}$$

整理可得

$$\left.\begin{aligned}(G_1+G_4+G_5)u_1+G_5u_2-(G_4+G_5)u_3&=-G_1u_{S1}\\G_5u_1+(G_5+G_6)u_2-(G_5+G_6)u_3&=-i_{S2}+G_6u_{S6}-\\(G_4+G_5)u_1-(G_5+G_6)u_2+(G_3+G_4+G_5+G_6)u_3&=-G_6u_{S6}\end{aligned}\right\}\tag{3.26}$$

方程组(3.26)就是图 3.27(a)所示电路的割集方程。为了便于分析，将式(3.26)写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix}G_1+G_4+G_5 & G_5 & -(G_4+G_5)\\ G_5 & (G_5+G_6) & -(G_5+G_6)\\ -(G_4+G_5) & -(G_5+G_6) & (G_3+G_4+G_5+G_6)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-G_1u_{S1}\\-i_{S2}+G_6u_{S6}\\-G_6u_{S6}\end{bmatrix}\tag{3.27}$$

由式(3.27)可以看到，左侧矩阵为树支电压列阵的系数矩阵，在网络不含有受控源电源时为对称矩阵。其对角线上的矩阵 G_{ii}，它是第 i 个割集方程中树支电压 u_i 前的系数，其值可以表示为割集 i 切割的所有支路电导之和。G_{ii} 称为割集 i 的自电导，对于不含有受控源电源的网络，G_{ii} 恒为正值。

矩阵中非主对角线上的元素 G_{ij} ($i\neq j$)称为割集 i 和割集 j 之间的互电导，它是割集方程中 u_j 前的系数，是割集 i 和割集 j 所有共有支路电导的代数和，若支路 k 为割集 i 和割集 j 所共有支路，如果两割集的参考方向对共有支路而言是相同的，该项取正值；反之，如果两割集的参考方向对共有支路而言是相反的，该项取负值。

割集方程式(3.27)右侧项为电源电流的代数和，其意义是将电路中的电压源等效变成电流源，再与电流源电流求代数和，它是两种电源电流的总和。如果电流源 i_{Sk} 属于割集 i，且电流源 i_{Sk} 的参考方向与割集 i 的方向是相同的，该项取负值；反之，如果电流源 i_{Sk} 的参考方向与割集 i 的方向是相反的，该项取正值。

[例 3.15]　电路如图 3.28(a)所示。求节点①与节点②之间的电压 u_{12}。

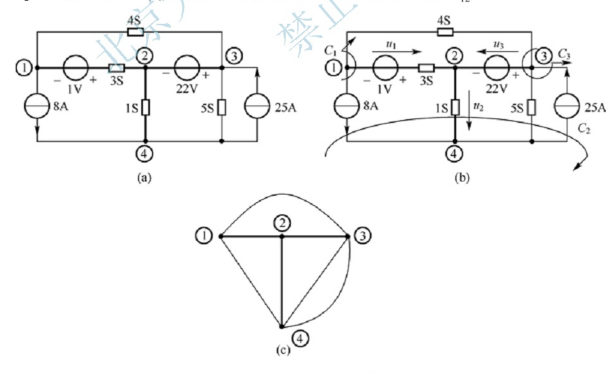


图 3.28　例 3.15 电路图

[解] 选树支电压如图 3.28(b)所示，分别为u_1、u_2和u_3。

已知$u_3=22\text{V}$，可以不建立关于u_3的基本割集方程。另外两个基本割集的 KCL 方程分别为

$$C_1:\quad (4+3)u_1-4\times 22=-8-3\times 1$$
$$C_2:\quad (5+1)u_2+5\times 22=25-8$$

以上两式联立求解得

$$u_1=11\text{V}\qquad u_2=-15.5\text{V}$$

所以
$$u_{12}=u_1=11\text{V}$$

[例 3.16] 电路如图 3.29(a)所示。已知：$G_1=1\text{S}$，$G_2=2\text{S}$，$G_3=3\text{S}$，$G_5=5\text{S}$，$u_{S1}=1\text{V}$，$u_{S3}=3\text{V}$，$u_{S4}=4\text{V}$，$u_{S6}=6\text{V}$，$i_{S3}=3\text{A}$。试用割集分析法求电流i_1以及电压源u_{S1}发出的功率P。

[解] 选树如图粗线所示，树支电压如图 3.29(c)所示，为u_1、u_4和u_6。

因为$u_4=u_{S4}=4\text{V}$，$u_6=u_{S6}=6\text{V}$，所以可以不建立关于u_4和u_6的基本割集方程，故只需要列关于u_1的基本割集方程。基本割集C_1如图 3.29(b)所画，其方程为

$$(G_1+G_2+G_5)u_1+(G_2+G_5)u_{S6}-G_5u_{S4}=G_1u_{S1}-i_{S3}$$
$$8u_1+24=0$$

即
$$u_1=-3\text{V}$$

得
$$i_1=G_1(u_1-u_{S1})=(-3-1)\text{A}=-4\text{A}$$

所以
$$P=-u_{S1}i=4\text{W}$$

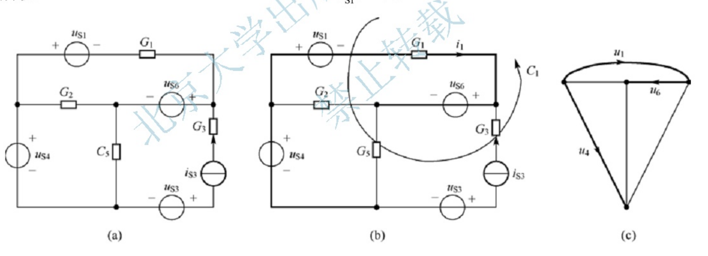


图 3.29　例 3.16 电路图

综上所述，不难总结出割集分析法的解题步骤：

(1) 画出电路的拓扑图，选一个“合适”的树；

(2) 画出基本割集及其参考方向，基本割集的参考方向与树支电压方向相同；

(3) 写出基本割集的 KCL 方程；

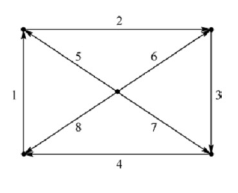
(4) 联立求解，得树支电压；

(5) 利用树支电压求得电路的其他未知量。

思考与练习

3.4-1　如图 3.4-1 所示拓扑图，试画出三种可能的树及其基本回路。

(选择支路集{1，2，3，7}为树，则支路集{1，2，3，4}，{2，3，7，5}，{3，7，6}，{1，2，3，7，8}等均为基本回路；若选择支路集{5，6，7，8}为树，则支路集{1，5，8}，{2，6，5}，{3，7，6}，{4，8，7}等均为基本回路；若选择支路集{1，5，7，3}，则支路集{1，5，7，4}，{2，3，7，5}，{1，5，8}，{3，7，6}等均为基本回路。)



题 3.4-1 图

3.4-2　思考一下割集分析法的注意事项和解题步骤。

(割集分析法解题时应注意：(1)树的选取；(2)基本割集的选取；(3)基本割集参考方向的选取；(4)含有受控源与理想独立源的处理。

割集分析法的解题步骤：(1)画出电路的拓扑图，选一个“合适”的树，并给各支路定向；(2)画出基本割集及其参考方向，基本割集的参考方向与树支电压方向相同；(3)写出基本割集的 KCL 方程。(4)联立求解，得树支电压；(5)利用树支电压求得电路的其他物理量。)

*3.5　非线性电路分析

由电压源、电流源和电阻元件构成的电路，称为电阻电路。由独立电源和线性电阻构成的电阻电路，称为线性电阻电路，否则称为非线性电阻电路。前面的电路分析方法都是对于线性电路而说的。其依据主要是 KCL、KVL 和元件的 VCR，分析非线性电阻电路的基本依据仍然是 KCL、KVL 和元件的 VCR。本节只讨论简单非线性电阻电路的分析，为学习电子电路打下基础。

3.5.1　非线性电阻元件

电压电流特性曲线是通过 $u-i$ 平面坐标原点的直线的二端电阻，称为线性电阻；否则称为非线性电阻。按照非线性电阻特性曲线的特点可以将它们进行分类。**其电流是端电压的单值函数的电阻，称为压控电阻**，用 $i=g(u)$ 表示；如图 3.30(a)所示隧道二极管是压控电阻。**其电压是电流的单值函数的电阻，称为流控电阻**，用 $u=f(i)$ 表示；图 3.30(b)和图 3.30(c)的普通二极管和氖灯是流控电阻，而图 3.30(d)所示理想二极管既不是流控电阻，又不是压控电阻。

其特性曲线对称于原点的电阻，称为双向电阻；否则称为单向电阻。图 3.30(c)所示氖灯是双向电阻，图 3.30(a)，图 3.30(b)，图 3.30(d)所示隧道二极管、普通二极管和理想二极管都是单向电阻。单向性的电阻器件在使用时必须注意它的正负极性，不能任意交换使用。

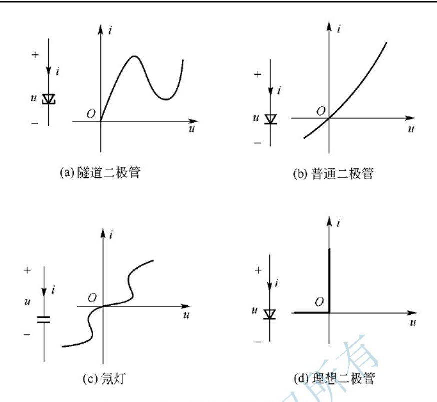


图 3.30　常用非线性电阻的特性曲线

理想二极管是开关电路中常用的非线性电阻元件。其参考方向如图 3.30(d)所示时，其电压电流关系为

$$\begin{cases} i = 0 & \text{当} u < 0 \text{时} \\ u = 0 & \text{当} i > 0 \text{时} \end{cases}$$

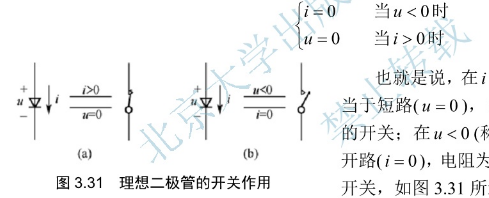


图 3.31　理想二极管的开关作用

也就是说，在 $i > 0$(称为正向偏置)时，它相当于短路($u = 0$)，电阻为零，它好像一个闭合的开关；在 $u < 0$ (称为反向偏置)时，它相当于开路($i = 0$)，电阻为无限大，它好像一个断开的开关，如图 3.31 所示。

3.5.2　非线性电阻电路的图解法

由线性电阻组成的单口网络，就端口特性而言，等效于一个线性电阻，其电阻值可用串联和并联等效电阻的公式求得。由非线性电阻(也可包含线性电阻)组成的单口网络，就端口特性而言，等效于一个非线性电阻，其 VCR 特性曲线可用图解法求得。**图解法是用作图来得到非线性电阻电路的电流、电压等未知量的分析方法**。这是求解非线性方程组的重要方法之一。

图 3.32(a)表示含一个非线性电阻的电路，它可以看做是一个线性含源电阻单口网络和一个非线性电阻的连接，如图 3.32(b)所示。图中所示非线性电阻可以是一个非线性电阻元件，也可以是一个含非线性电阻的单口网络的等效非线性电阻。这类电路的分析方法如下：

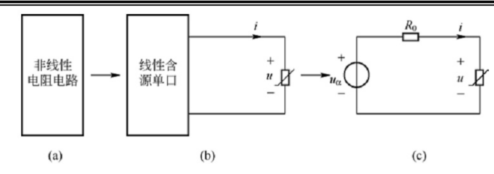


图 3.32　含一个非线性电阻的电路

(1) 将线性含源电阻单口网络用戴维南(或诺顿)等效电路代替，如图 3.32(c)所示。

$$\left.\begin{aligned} u &= u_{oc} - R_o i \\ i &= g(u) \end{aligned}\right\} \tag{3.28}$$

(2) 写出戴维南等效电路和非线性电阻的 VCR 方程。

$$u = u_{oc} - R_o g(u) \tag{3.29}$$

这是一个非线性代数方程。若已知 $i = g(u)$ 的解析式，则可用解析法求解；若已知 $i = g(u)$ 的特性曲线，则可用以下图解法求非线性电阻上的电压和电流。

在 u–i 平面上画出戴维南等效电路的 VCR 曲线。它是通过(u_{oc} ，0)和(0，u_{oc}/R_o)两点的一条直线。该直线与非线性电阻特性曲线 $i = g(u)$ 的交点为 Q，对应的电压和电流是式(3.28)的解答。交点 $Q(u_Q, I_Q)$ 称为“工作点”。直线 $u = u_{oc} - R_o i$ 称为“负载线”，如图 3.33 所示。

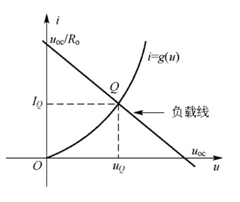


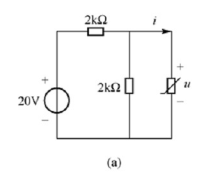
图 3.33　工作点的确定

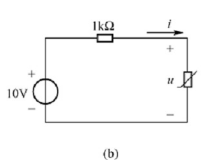
求得端口电压和电流后，可用电压源或电流源替代非线性电阻，再用线性电路分析方法求含源单口网络内部的电压和电流。

[例 3.17] 图 3.34(a)所示的电路，已知非线性电阻特性曲线如图 3.34(b)中折线所示。用图解法求电压 u 和电流 i 。

[解] 求线性含源电阻单口的戴维南等效电路，得到 $u_{oc} = 10\text{V}$ ， $R_o = 1\text{k}\Omega$ 。于是，图 3.34(a)等效变换为图 3.34(b)。在图 3.34(c)的 $u - i$ 平面上，通过(10V，0)和(0，10V/1kΩ)两点作直线，它与非线性特性曲线交于 Q_1 、 Q_2 和 Q_3 三点。这三点相应的电压 u 和电流 i 分别为

$$Q_1:\quad U_Q = 3\text{V} \qquad I_Q = 7\text{mA}$$
$$Q_2:\quad U_Q = 5\text{V} \qquad I_Q = 15\text{mA}$$
$$Q_3:\quad U_Q = 6.5\text{V} \qquad I_Q = 3.5\text{mA}$$





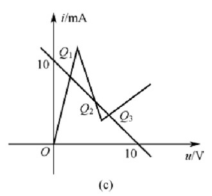


图 3.34　例 3.17 电路图

此例说明非线性电阻电路可以存在多个解答。究竟工作于哪个点，与实际电路的具体情况有关。

总之，电路中存在的非线性电阻元件较少时，图解法是一种有效的方法，只存在一个非线性电阻的电路，非线性电阻元件以外的线性二端网络的外特性和非线性元件的伏安特性的交点就是所求的解。

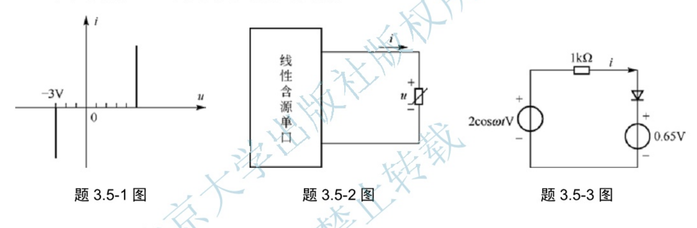
思考与练习

3.5-1　试设计一个电阻单口网络，其 VCR 特性如题 3.5-1 图所示曲线。

3.5-2　电路如题 3.5-2 图所示。试用负载线法求非线性负载电阻满足什么条件时获得最大功率？

($R_L = R_0$时，$P_{\text{Lmax}} = \dfrac{u_\alpha^2}{4R_0}$)

3.5-3　试画出题 3.5-3 图电路中电流 i 的波形。



题 3.5-1 图　　题 3.5-2 图　　题 3.5-3 图

3.6　含有运算放大器的电路分析

运算放大器(operational amplifier)的应用日益广泛，它是电路理论中一个重要的多端元件。本节介绍运算放大器的电路模型，运用放大器在理想化情况下的特性，以及具有运算放大器的电阻电路的分析。另外介绍一些典型电路，如比例器，加法器等。

3.6.1　运算放大器模型

运算放大器简称运放，是一种多端集成电路，通常由数十个晶体管和一些电阻构成。现已有上千种不同型号的集成运放，是一种价格低廉、用途广泛的电子器件。早期，运放用来完成模拟信号的求和、微分和积分等运算，故称为运算放大器。现在，运放的应用已远远超过运算的范围。它在通信、控制和测量等设备中得到广泛应用。

运算放大器基本上是高放大倍数的直接耦合的放大器。放大器的内部结构虽然很复杂，但制成品只有几个端点和外部电路连接。因此，如果从电路分析的角度，只是把它看成一种电路元件对待，只需了解运算放大器的外部特性及其等效电路就可以了。

运算放大器的图形符号如图 3.35(a)所示，它有两个电源端(称偏置电源)分别与直流电源相接，E^{+} 端接正电压，E^{-} 端接负电压，这是保证运算放大器内部正常工作所必需的。在分析运放时，可以不考虑偏置电源。这时可采用图 3.35(b)所示电路符号。

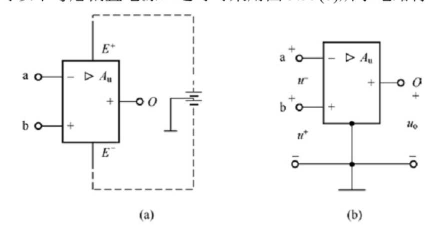


图 3.35　运算放大器的图形符号

左侧 a“−”端为反相输入端，当信号由此端对地输入时，输出信号与输入信号反相位，反相输入端的电位用 u^{-} 表示。

左侧 b“+”端为同相输入端，当信号由此端对地输入时，输出信号与输入信号同相位，同相输入端的电位用 u^{+} 表示。

运算放大器的输入有三种方式：

(1) 如果从 a 端和 b 端分别同时加入电压 u^{-} 和 u^{+}，则有

$$u_{\text{o}} = A_u(u^{+} - u^{-}) = A_u u_{\text{d}} \tag{3.30}$$

式中，$u_{\text{d}} = u^{+} - u^{-}$，$A_u$ 为运放的电压放大倍数(或电压增益的绝对值)。运放的这种输入情况称为差动输入，u_{d} 称为差动输入电压。

(2) 只在反相输入端输入电压，即其“+”端接地，则有

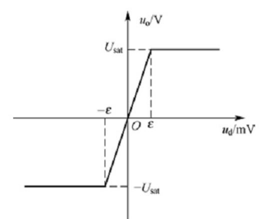
$$u_{\text{o}} = -A_u u^{-}$$

(3) 只在同相输入端输入电压，即其“−”端接地，则有

$$u_{\text{o}} = A_u u^{+}$$

运放的输出电压 u_{o} 与差动输入电压 u_{d} 之间的关系可以用图 3.36 近似的表示。在 $-\varepsilon \leqslant u_{\text{d}} \leqslant \varepsilon$ (ε 很小时)的范围内，u_{o} 与 u_{d} 的关系用通过原点的一段直线表示，其斜率等于 A_{u}。由于放大倍数 A_u 值很大，所以这段直线很陡。当输入电压 u_{d} 达到一定数值后就趋于饱和，图中用 $\pm U_{\text{sat}}$ 表示。此饱和电压值略低于直流偏置电压值，这个关系曲线称为运放的外特性。

图 3.37 为运放的电路模型，其中电压控制电压源的电压为 $A(u^{+} - u^{-})$，R_{in} 为运放的输入电阻，R_{o} 为运放的输出电阻。实际运放 R_{in} 较大，R_{o} 较小。本节我们把运放工作范围局限在线性段。即假设：$-U_{\text{sat}} \leqslant u_{\text{o}} \leqslant U_{\text{sat}}$。放大倍数 A 很大，而饱和电压一般为正负十几伏或几伏，这样输入电压必须很小。运放的这种工作状态称为“开环运行”，A_{u} 就称为开环放大倍数，在实际的应用中，往往通过一定的方式把输出的一部分返回(反馈)到输入中去，这种工作状态称为“闭环运行”。



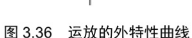


图 3.36　运放的外特性曲线

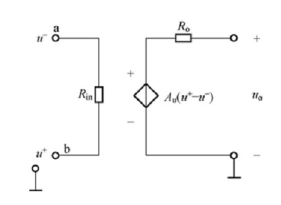


图 3.37　运放的电路模型

在 $-U_{sat} \leqslant u_o \leqslant U_{sat}$ 范围内，**如果假设运放的电路模型的 R_{in} 无穷大，R_o 为零，且认为 A_u 为无穷大，则称为这种运放为理想运放**。并且在表示运放的图形符号中加上“∞”以说明，否则用 A 表示。

新国标中，运放及理想运放的符号分别如图 3.38(a)及图 3.38(b)所示。

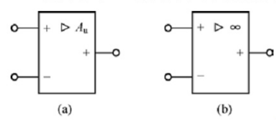


图 3.38　运算放大器的新国标符号

实际运放的工作情况比以上所介绍的要复杂一些。比如，放大倍数 A_u 不仅为有限值，而且随着频率的增高而下降。通常，图 3.37 所示电路模型在输入电压频率较低时是足够精确的。为了简化分析起见，今后讨论的运算放大器是理想运算放大器。

3.6.2　含理想运放的电路分析

1. 含理想运放的电路分析原则

所谓“理想运放”，是指图中模型的电阻 R_{in} 为无穷大、 R_o 为零，A 为无穷大的情况。由此可以得出含有理想运放的电路的分析方法。根据输入/输出特性，可以得出含有理想运放器件的电路的分析原则。

虚短：由于理想运放的线性段放大倍数 $A_u = \infty$ ，而输出电压 $u_o = A_u(u^+ - u^-) = A_u u_d$ 为有限值，则有：

$$\boxed{u^+ - u^- = 0} \tag{3.31}$$

这就是所谓的“虚短”。在分析计算中，运放的同相端与反相端等电位。

虚断：理想运放工作在线性区内时，由于 $R_i = \infty$，所以反相输入端和同相输入电流均为零，即

$$\boxed{i^+ = i^- = 0} \tag{3.32}$$

通常称为“虚断路”。在分析计算含运放的电路时，可以将运放的两个输入端视为开路。

虚地：当运放的同相端(或反相端)接地时，运放的另一端也相当于接地，一般称为“虚地”。

合理地运用这些条规则，并与节点法结合起来加以运用，将使这类电路的分析大为简化。下面举一些实例来说明。

2．含理想运放的电路分析举例

[例 3.18] 反相比例器。已知反相比例器电路如图 3.39 所示。求：该电路的输入/输出关系。

[解] 由于“虚短”，则$u^{-}=0$。因为

$$i=\frac{u_{i}-u^{-}}{R}=\frac{u_{i}-0}{R}=\frac{u_{i}}{R}$$

$$i_{F}=\frac{u^{-}-u_{o}}{R_{F}}=\frac{0-u_{o}}{R_{F}}=-\frac{u_{o}}{R_{F}}$$

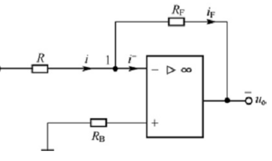


图 3.39 例 3.18 电路图

由于“虚断”，理想运放的输入电流为零，即$i^{-}=0$，所以$i=i_{F}$

$$i=\frac{u_{i}}{R}=i_{F}=-\frac{u_{o}}{R_{F}}$$

因此

$$u_{o}=-\frac{R_{F}}{R}u_{i}$$

由此可见，当可以通过改变电阻R、R_{F}的大小，从而使得电路的比例系数改变。该电路正是一个由运放构成的反相比例器。

注意：其中R_{B}称为平衡电阻，主要作用是保持运放输入级电路的对称性。其他的运放电路中均有此平衡电阻存在，只是具体的计算不在本课程中讲述。

[例 3.19] 加法器。已知加法器电路如图 3.40 所示。求：该电路的输入/输出关系。

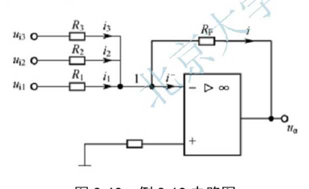


图 3.40 例 3.19 电路图

[解] 由于“虚断”，理想运放的输入电流为零，即$i^{-}=0$，所以

$$i=i_{1}+i_{2}+i_{3}$$

由于“虚短”，则节点 1 的电位为零。列出方程：

$$i_{3}=\frac{u_{i3}-0}{R_{3}}=\frac{u_{i3}}{R_{3}} \qquad i_{2}=\frac{u_{i2}-0}{R_{2}}=\frac{u_{i2}}{R_{2}}$$

$$i_{1}=\frac{u_{i1}-0}{R_{1}}=\frac{u_{i1}}{R_{1}} \qquad i=\frac{0-u_{o}}{R_{F}}=-\frac{u_{o}}{R_{F}}$$

对节点 1 列出 KCL 节点方程，有

$$i=i_{1}+i_{2}+i_{3}$$

所以

$$u_{o}=-R_{F}\left(\frac{u_{i1}}{R_{1}}+\frac{u_{i2}}{R_{2}}+\frac{u_{i3}}{R_{3}}\right)$$

由此可见，当$R_{1}=R_{2}=R_{3}=R_{F}$时，$u_{o}=-(u_{i1}+u_{i2}+u_{i3})$，其实，该电路正是一个由运放构成的反相加法器。

综上所述，含有理想运放的电路分析特点：

(1) 反相输入端和同相输入端的输入电流均为零[可称为“虚断(路)”]；

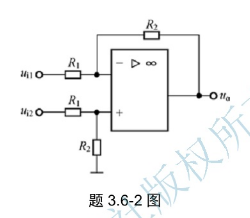
(2) 对于公共端(地)来说，反相输入端的电压与同相输入端的电压相等[可称为：“虚短(路)”]。

思考与练习

3.6-1　分析一下反相器电路，思考反相器是如何实现的？

3.6-2　减法器如题 3.6-2 图所示。思考减法器的输入/输出关系。

$$\left(u_o = \frac{R_2}{R_1}(u_2 - u_1)\right)$$



题 3.6-2 图

*3.7　计算机辅助电阻电路分析

电路的分析和设计都需要完成一定的数学运算工作。人们曾经使用计算尺和计算器来完成一定的计算工作，随着计算机和大规模集成电路的发展，现在已经广泛使用计算机来辅助电路的分析和设计。计算机是一种智能的计算工具，不仅能在很短的时间完成大量的数学运算，还能够自动建立电路方程，并将计算结果进行处理，用图形和动画的形式表现出来。因此，在学习电路理论课程时，有必要了解计算机分析电路的基本方法和使用计算机来辅助电路理论课程的教学(CAI)工作。

3.7.1　电路模型的矩阵表示方法

利用已有计算机程序辅助电路分析设计的基本方法是首先将电路模型的有关数据告诉计算机，再用人机对话的方式，告诉需要计算机做哪些分析计算工作，并将计算结果输出到屏幕或打印机或文件中。人们对计算结果进行分析研究后，可以对电路的结构和参数进行修改后重新进行分析计算，直到满意为止，如下所示。

电路模型⟶计算机⟶输出计算结果

↑

指令

利用计算机来分析电路时，不需要考虑采用哪种分析方法和列出电路方程，也不必花费很多时间去求解电路方程，并检验计算结果是否正确。用计算机辅助电路分析，能够用

较少的时间分析更多的更复杂的电路，可以用更多的精力和时间来对计算结果进行分析研究，从而更好地掌握各种电路的特性以及电路的基本概念和基本理论。

在分析电路时，必须知道组成电路的各元件的类型，参数，连接关系和支路参考方向等信息。人们通常用观察电路图的方法来获取这些信息，而一般的计算机还不善于识别这种电路图。当用计算机分析电路时，需要将这些信息转换为一组数据，按照一定方式存放在一个矩阵或表格中，供计算机建立电路方程时使用。例如图 3.41 所示电路可以用表 3.1 的一组数据表示。

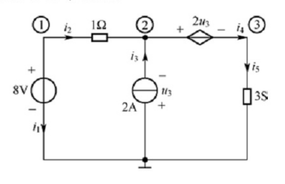


图 3.41　计算机辅助电路分析举例

表 3.1　图 3.41 电路的矩阵转换数据

元件类型	支路编号	开始节点	终止节点	控制支路	元件参数
V	1	1	0		8.0
R	2	1	2		1.0
I	3	0	2		2.0
VV	4	2	3	3	2.0
G	5	3	0		3.0

矩阵中的每一行表示一条支路的有关信息，对于受控源，还要说明控制支路的编号。元件类型用一个或两个大写英文字母表示，例如电压源、电流源、电阻和电导分别 V、I、R、G 表示，电压控制电压源(VCVS)用 VV 表示。支路电压电流的关联参考方向规定为从开始节点指向终止节点。各种元件参数均用主单位表示，即电压用伏特(V)，电流用安培(A)，电阻用欧姆(Ω)，电导用西门子(S)。

当用计算机程序分析电路时，应根据电路图写出这些电路数据，在程序运行时，从键盘将这些数据输入计算机，或者将这些数据先存入到某个数据文件(例如 D.DAT)中，让计算机从这个文件中自动读入这些数据。

3.7.2　电路的表格方程

根据 KCL，KVL 和 VCR，以 b 个支路电压和 b 个支路电流作为未知量建立的一组电路方程，称为 $2b$ 方程，它适用于任何集中参数电路。由 $2b$ 方程导出的支路电流方程，网孔和回路电流方程，以及节点电压方程，减少了未知量，便于手算求解。人们可以根据不同的电路采用不同的方程来分析电路，以减少计算的工作量。而在用计算机分析电路时，从便于建立电路方程和程序的通用性等因素的考虑，常常采用表格方程(Tableau Equation)和改进的节点方程(Modified Node Equation)。从电路课程教学的角度考虑，宜采用表格分析方法，它的优点是：①对电路元件的类型没有限制；②容易建立电路方程；③求解表格方程可直接得到全部节点电压，支路电压电流和吸收功率。表格方程的缺点是方程数目多，这在用计算机分析小规模电路时并不突出。表格方程是以节点电压，支路电压和支路电流作为未知量，用表格或矩阵形式列出的 KCL，KVL 和 VCR 方程。现以图 3.41 电路为例，说明表格方程的建立过程。

(1) 用矩阵形式列出节点①、②、③的 KCL 方程。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

简写为

$$\boldsymbol{AI} = 0$$

式中，$\boldsymbol{A}$ 称为关联矩阵，它表示支路与节点的关联关系，其元素为

$$a_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{如果支路}k\text{离开节点}i \\ -1 & \text{如果支点}k\text{进入节点}i \\ 0 & \text{如果支点}k\text{不与节点}i\text{相连} \end{cases}$$

(2) 用矩阵形式列出支路电压与节点电压关系的 KVL 方程。

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

简写为

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}$$

其中 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 表示关联矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵。

(3) 以 $mu + ni = u_{\mathrm{S}}$ 形式列出矩阵形式的 VCR 方程。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

简写为

$$\boldsymbol{MU} + \boldsymbol{NI} = \boldsymbol{U}_{\mathrm{S}}$$

(4) 将 KCL，KVL 和 VCR 方程放在一起，得到以下表格方程。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \boldsymbol{A} \\ -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & 1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{M} & \boldsymbol{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{V} \\ \boldsymbol{U} \\ \boldsymbol{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \boldsymbol{U}_{\mathrm{S}} \end{bmatrix}$$

简写为

$$\boldsymbol{TW} = \boldsymbol{E}_{\mathrm{S}}$$

式中，$\boldsymbol{T}$ 称为表格矩阵，由于矩阵中大部分系数为零，又称为稀疏表格矩阵。表格方程可用高斯消去法求解，若 $\boldsymbol{T}$ 矩阵的行列式不为零，即 $\det \boldsymbol{T} \neq 0$，则该电路有唯一解。

计算机求解线性代数方程常用的方法是高斯消去法。高斯消去法是用行初等变换的方法将下三角形元素变为零，再用回代方法求出各变量的值。这是数学问题，这里就不做讨论了。

当用计算机来分析电路时，必须有一个电路分析程序，读者可以利用现成的通用电路分析程序，也可以自己动手编制一个电路分析程序。具体程序可参阅其他有关资料或书籍。

3.7.3　PSPICE 程序简介

PSPICE 是由 SPICE 发展而来的用于微机系列的通用电路分析程序。SPICE(Simu 1一ation Program with Integrated Circuit Emphasis)是由美国加州大学伯克莉分校于 1972 年开发的电路仿真程序。随后，版本不断更新，功能不断增强和完善。1988 年 SPICE 被定为美国国家工业标准。目前微机上广泛使用的 PSPICE 是由美国 MicroSim 公司开发并于 1984 年 1 月首次推出的。SPICE 有工业版(Production version)和教学版(Evaluation version)之分，本书介绍 1986 年 8 月推出的 PSPICE6.3 版本(MicroSim Evaluation Version 6.3，即教学版，有时也称为学生版)。它能进行模拟电路分析、数字电路分析和模拟数字混合电路分析。

PSPICE 可以对众多元器件构成的电路进行仿真分析，这些元器件以符号、模型和封装三种形式分别存放在扩展名为.slb、.lib 和.plb 三种类型的库文件中。*.slb 库中的元器件符号用于绘制电路图；*.lib 库中的元器件模型用于电路仿真分析；*.plb 库中的元器件封装形式用于绘制印制电路板的版图。在电路仿真分析中只用到前两个库。

1. PSPICE6.3 运行环境

硬件环境：486 以上的 IBM PC 或兼容机，8MB 以上内存，最好有 80MB 以上硬盘空间(PSPICE6.3 完全安装将占用 63MB 左右的空间)，标准键盘及 VGA 以上显示适配器，鼠标，CD-ROM 驱动器(用于安装 PSPICE)。

软件环境：Windows 3.X、Windows 95 或 Windows NT 3.51 以上。

2. PSPICE 功能简介

PSPICE6.3 可执行的主要分析功能如下。

1) 直流分析

包括电路的静态工作点分析；直流小信号传递函数值分析；直流扫描分析；直流小信号灵敏度分析。在进行静态工作点分析时，电路中的电感全部短路，电容全部开路，分析结果包括电路每一节点的电压值和在此工作点下的有源器件模型参数值。这些结果以文本文件方式输出。

直流小信号传递函数值是电路在直流小信号下的输出变量与输入变量的比值，输入电阻和输出电阻也作为直流解析的一部分被计算出来。进行此项分析时电路中不能有隔直电容。分析结果以文本方式输出。

直流扫描分析可作出各种直流转移特性曲线。输出变量可以是某节点电压或某节点电流，输入变量可以是独立电压源、独立电流源、温度、元器件模型参数和通用(Global)参数(在电路中用户可以自定义的参数)。

直流小信号灵敏度分析是分析电路各元器件参数变化时，对电路特性的影响程度。灵敏度分析结果以归一化的灵敏度值和相对灵敏度形式给出，并以文本方式输出。

2) 交流小信号分析

包括频率响应分析和噪声分析。PSPICE 进行交流分析前，先计算电路的静态工作点，决定电路中所有非线性器件的交流小信号模型参数，然后在用户所指定的频率范围内对电路进行仿真分析。

频率响应分析能够分析传递函数的幅频响应和相频响应，即可以得到：电压增益、电流增益、互阻增益、互导增益、输入阻抗、输出阻抗的频率响应。分析结果均以曲线方式输出。

PSPICE 用于噪声分析时，可计算出每个频率点上的输出噪声电平以及等效的输入噪声电平。噪声电平都以噪声带宽的平方根进行归一化。

3) 瞬态分析

即时域分析，包括电路对不同信号的瞬态响应，时域波形经过快速傅里叶变换(FFT)后，可得到频谱图。通过瞬态分析，也可以得到数字电路时序波形。

另外，PSPICE 可以对电路的输出进行傅里叶分析，得到时域响应的傅里叶分量(直流分量、各次谐波分量、非线性谐波失真系数等)。这些结果以文本方式输出。

4) 蒙特卡罗(Monte Carlo)分析和最坏情况分析

蒙特卡罗分析是分析电路元器件参数在它们各自的容差(容许误差)范围内，以某种分布规律随机变化时电路特性的变化情况，这些特性包括直流、交流或瞬态特性。

最坏情况分析与蒙特卡罗分析都属于统计分析，所不同的是，蒙特卡罗分析是在同一次仿真分析中，参数按指定的统计规律同时发生随机变化；而最坏情况分析则是在最后一次分析时，使各个参数同时按容差范围内各自的最大变化量改变，以得到最坏情况下的电路特性。

下面，用一个实例来说明。

[例 3.20] 直流电路如图 3.42 所示，求节点电压 V(2)。

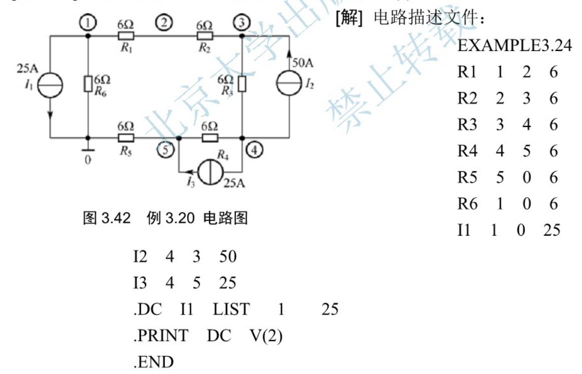


图 3.42　例 3.20 电路图

[解] 电路描述文件：

```
EXAMPLE3.24
R1   1   2   6
R2   2   3   6
R3   3   4   6
R4   4   5   6
R5   5   0   6
R6   1   0   6
I1   1   0   25
I2   4   3   50
I3   4   5   25
.DC   I1   LIST   1   25
.PRINT   DC   V(2)
.END
```

仿真结果可以在 File-Browse Output 菜单下观看。下面就是结果：

```
I1              V(2)
1.000E+00       4.600E+01
2.500E+01      -5.000E+01
```

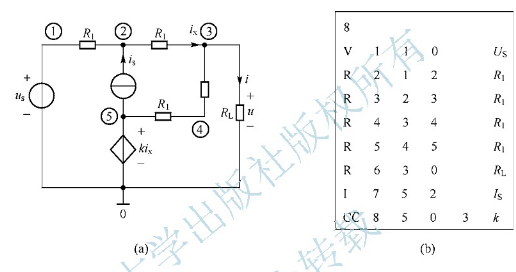
可以看出，当 I1 为 25A 时，节点电压为 V(2)=−50V。

思考与练习

3.7-1　利用计算机进行电路分析有哪些优点？

(利用计算机分析电路，不需要考虑采用哪种分析方法和列出电路方程，也不必花费很多时间去求解电路方程，并检验计算结果是否正确。用计算机辅助电路分析，能够用较少的时间分析更多的更复杂的电路，可以用更多的精力和时间来对计算结果进行分析研究，从而更好地掌握各种电路的特性。)

3.7-2　电路如题 3.7-2(a)图所示，已知 $u_S = 5V$，$i_S = 1A$，$R = 1\Omega$，$k = 1$，求当负载电阻 R_L 分别为 0Ω，0.2Ω，0.4Ω，0.6Ω，0.8Ω，1.0Ω 时的电压 u，电流 i 以及所吸收的功率 P。



(a)　　(b)

题 3.7-2 图

参考答案如下：

负载电阻 $R_L(\Omega)$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
电阻电压 u(V)	0	0.72	1.2	1.52	1.8	2
电阻电压 i(A)	0	3.6	3	2.57	2.25	2
吸收功率 P(W)	0	2.59	3.6	3.97	4.05	4

3.8　小　　结

本章介绍了分析线性电路的几种基本方法、非线性电路的分析方法、含集成运算放大器的电路的分析以及计算机辅助分析等方法。

1. 线性电路的分析方法

线性电路分析的基本任务是根据已知电路，求解出电路中电压和电流。电路分析的基本方法是利用 KCL，KVL 和 VCR 建立一组电路方程，并求解得到电压和电流。到目前为止，本书已经介绍了 $2b$ 法，支路电流法，网孔电流法、回路分析法，节点电压法及割集分析法。

1) 支路电流法

对于一个具有 b 条支路，n 个节点的电路，当以支路电压与支路电流为电路变量列出方程时，总计有 $2b$ 个未知量。应用 KCL 可以列出 $(n-1)$ 个独立方程，应用 KVL 可以列出 $(b-n+1)$ 个独立方程，应用各支路的 VCR 又可以列出 b 个独立方程。总计方程数为 $2b$ 个，与未知数相等。因此，可由 $2b$ 个独立方程解出 $2b$ 个支路电压与支路电流变量。这种方法称为支路法(又称 $2b$ 法)。

为了减少求解的方程数，可以利用元件的 VCR，将 b 条支路电压用相应的支路电流表示，然后代入 KVL 方程，这样就得到以 b 个支路电路电流为未知量的 b 个 KCL 和 KVL 方程。方程数从 $2b$ 减少为 b 。这种方法称为支路电流法。

2) 网孔电流法

网孔电流法适用于平面电路，其方法是:

(1) 以网孔电流为变量，列出网孔的 KVL 方程(网孔方程)。

(2) 求解网孔方程得到网孔电流，再用 KCL 和 VCR 方程求各支路电流和支路电压。

当电路中含有电流源与电阻并联单口时，应先等效变换为电压源与电阻串联单口。若没有电阻与电流源并联，则应增加电流源电压变量来建立网孔方程，并补充电流源与网孔电流关系的方程。

3) 节点电压法

节点电压法适用于连通电路，其方法是:

(1) 以节点电压为变量，列出节点 KCL 方程(节点方程)。

(2) 求解节点方程得到节点电压，再用 KVL 和 VCR 方程求各支路电压和支路电流。

当电路中含有电压源与电阻串联的单口时，应先等效变换为电流源与电阻并联单口。若没有电阻与电压源串联，则应增加电压源电流变量来建立节点方程，并补充电压源电压与节点电压关系的方程。

4) 回路分析法

网孔电流法仅适用于平面电路，对于非平面电路来说只能用回路法。

回路分析法实际是回路电流分析法，基本回路电流是一组独立的求解变量，以基本回路电流为变量，建立 KVL 方程的方法为回路分析法。

5) 割集分析法

割集分析法与回路分析法一样，是建立在“树”的基础上的一种分析方法。割集分析法是将树支电压作为一组独立的求解变量，根据基本割集建立 KCL 方程，因此割集分析法也可以称为割集电压分析法。割集分析法的选树原则与回路分析法相同，即尽可能将电压源及电压控制量选为树支，电流源及电流控制量选为连支。

2. 非线性电路分析

由电压源、电流源和电阻元件构成的电路，称为电阻电路。由独立电源和线性电阻构成的电阻电路，称为线性电阻电路，否则称为非线性电阻电路。分析非线性电阻电路的基本依据仍然是 KCL、KVL 和元件的 VCR。

电路中存在的非线性电阻元件较少时，图解法是一种有效的方法，只存在一个非线性电阻的电路，非线性电阻元件以外的线性二端网络的外特性和非线性元件的伏安特性的交点就是所求的解。

3. 含理想集成运放的电路分析

含有理想运放的电路的分析有一些特点，按照前面介绍的理想运放的性质可以得到以下两条规则：

(1) 反相输入端和同相输入端的输入电流均为零：$\boxed{i^{+}=i^{-}=0}$，为“虚断”。

(2) 反相输入端的电压与同相输入端的电压相等：$\boxed{u^{+}-u^{-}=0}$，为“虚短”。

4. 计算机辅助电路分析

(1) 在进行计算机分析电路的程序时，常常采用表格方程，它是最原始最基本的一种电路约束方程，它适用于任何集中参数电路。

对于 n 个节点，b 条支路的连通电路。其表格方程由 KCL，KVL 和 VCR 方程组成。

(2) 高斯消去法是计算机求解线性代数方程最常用的一种方法。

(3) 现在已经广泛使用各种计算机程序来辅助电路分析和设计。用计算机辅助电路分析的主要工作是将反映电路结构和参数的一组数据，正确地来告诉计算机，计算机能够自动地建立电路方程，并将计算结果输出到屏幕上或文件及打印机中。

(4) 基于数值计算方法的计算机程序，能够对规模很大的电路进行分析计算，求出电路在特定参数下的解答，并以一组数据或曲线的形式输出到文件或打印机中。

(5) 在对电路进行深入地分析和研究时，最好能得到用符号表示电路元件参数的电压电流表达式。基于符号计算方法的计算机程序，能够得到这种表达式，它对分析和设计新电路十分有用。

3.9 习　题

3.9.1 填空题

1. 一个有 n 个节点、b 条支路的电路的图，有__________个独立回路。
2. 一个具有 b 条支路和 n 个节点的平面电路，可编写__________个独立的 KCL 方程和__________个独立的 KVL 方程。
3. 所谓支路电流法就是以__________为未知量，依据__________列出方程式，然后解联立方程得到__________的数值。
4. 网孔电流法是以__________作为电路的独立变量，它仅适用于平面电路。
5. 网孔电流法仅适用于平面电路，回路电流法则无此限制，它不仅适用于__________，而且适用于__________。
6. 根据支路电流法解得的电流为正值时，说明电流的参考方向与实际方向________；电流为负值时，说明电流的参考方向与实际方向__________。
7. 回路电压方程中，自阻总是__________，互阻的正负由__________决定。
8. 列节点电压方程时，先指定一个节点为__________，其余节点与该节点之间的电压称为节点电压。

9. 某支路用支路电流法求解的数值方程组如下：

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

$$5I_1 - 20I_2 - 20 = 0$$

$$10 + 20I_3 - 10I_2 = 0$$

则该电路的节点数为____________，网孔数为____________。

10. 割集分析法是将____________作为一组独立的求解变量，根据基本割集建立 KCL 方程并求解的电路分析方法。

11. 集成运放内部电路由____________、____________、____________和____________四部分组成。

12. 所谓“理想运放”，是指____________________________________。

13. 非线性电路分析的依据是____________________________________。

3.9.2　选择题

1. 节点法是以(　　)为待求量。
   A. 回路电流　　B. 网孔电流　　C. 节点电压　　D. 支路电流

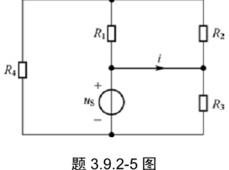
2. 支路电流法是以(　　)为待求量。
   A. 回路电流　　B. 网孔电流　　C. 节点电压　　D. 支路电流

3. 用支路电流法解算电路问题需要列出(　　)个独立方程。
   A. 与支路数相等　　B. 支路数加一　　C. 与节点数相等　　D. 以上答案都不对

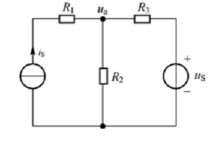
4. 用节点电压法解算电路问题需要列出(　　)个独立方程。
   A. 与支路数相等　　B. 节点数减一
   C. 与节点数相等　　D. 以上答案都不对

5. 题 3.9.2-5 图所示电路中，已知 $u_S = 10V, R_1 = R_2 = 4\Omega, R_3 = 10\Omega, R_4 = 3\Omega$，图中电流 i 为(　　)。
   A. 0.5A　　B. 1.0A　　C. 1.5A　　D. 2.0A

6. 题 3.9.2-6 图所示电路中，a 点的节点电压 u_a 的方程为(　　)。
   A. $(1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3)u_a = i_S + u_S / R_3$　　B. $(1/R_1 + 1/R_2)u_a = i_S + u_S / R_3$
   C. $(1/R_2 + 1/R_3)u_a = i_S + u_S / R_3$　　D. $(R_1 + R_2 + R_3)u_a = i_S + u_S / R_3$



题 3.9.2-5 图

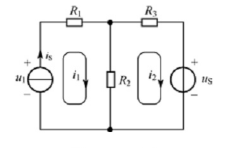


题 3.9.2-6 图

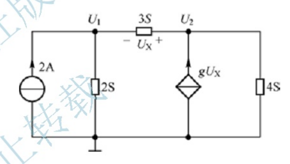
7. 题 3.9.2-7 图所示电路中，回路 1 正确的回路电流方程为(　　)。
   A. $(R_1 + R_2)i_1 - R_2 i_2 = 0$　　B. $(R_1 + R_2)i_1 - R_2 i_2 = i_S$
   C. $(R_1 + R_2)i_1 - R_2 i_2 = -u_I$　　D. $i_1 = i_S$

8. 如题 3.9.2-8 图所示电阻电路，其 $R_1 = 2\Omega$，$R_2 = 1\Omega$，$R_3 = 1\Omega$，$I_1 = 2\text{A}$，$I_2 = 1\text{A}$。求结点电压 U_1 和 U_2 分别是多少？(　　)

A. 1V；2V　　B. 2.5V；1.5V　　C. 2.5V；1.75V　　D. 2.5V；1V



题 3.9.2-7 图



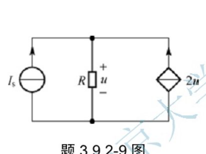
题 3.9.2-8 图

9. 如题 3.9.2-9 图所示电路，其 $R = 2\Omega$，$I_S = 3\text{A}$。求 R 上的电压 u 是多少？(　　)

A. 1V　　B. −1V　　C. 2V　　D. −2V

10. 题 3.9.2-10 图所示电路中，已知节点电压方程为 $\begin{cases} 5U_1 - 3U_2 = 2 \\ -U_1 + 5U_2 = 0 \end{cases}$，则 VCCS 的控制系数 $g = $(　　)。

A. 1S　　B. −1S　　C. 2S　　D. −2S



题 3.9.2-9 图

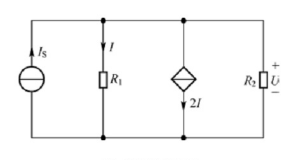
题 3.9.2-10 图

11. 题 3.9.2-11 图所示电路中，已知 $I_S = 5\text{A}$，$R_1 = 8\Omega$，$R_2 = 4\Omega$。由节点分析法可求得 $U = $(　　)。

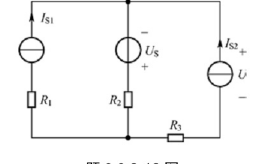
A. 0　　B. 8V　　C. 20V　　D. 40V

12. 题 3.9.2-12 图所示电路中，已知 $U_S = 5\text{V}$，$I_{S1} = 2\text{A}$，$I_{S2} = 1\text{A}$，$R_1 = 3\Omega$，$R_2 = R_3 = 5\Omega$，则 $U = $(　　)。

A. 10V　　B. 15V　　C. 20V　　D. 25V



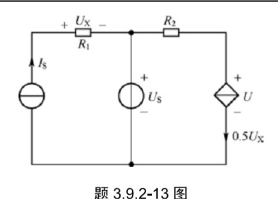
题 3.9.2-11 图



题 3.9.2-12 图

13. 题 3.9.2-13 图所示电路中，已知 $U_S = 3\text{V}$，$I_S = 2\text{A}$，$R_1 = 4\Omega, R_2 = 20\Omega$，则 $U = $(　　)。

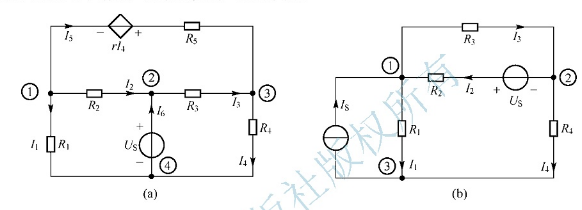
A. −83V　　B. −77V　　C. 77V　　D. 83V



题 3.9.2-13 图

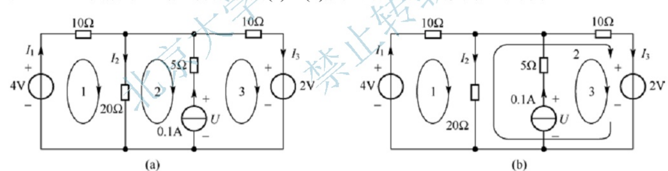
3.9.3　计算题

1. 列出题 3.9.3-1 图所示电路的支路电流方程。



题 3.9.3-1 图

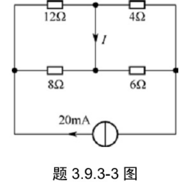
2. 题 3.9.3-2 图所示电路，分别按图(a)、(b)规定的回路列出支路电流方程。



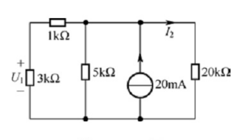
题 3.9.3-2 图

3. 求题 3.9.3-3 图所示电路的支路电流 I。

4. 求题 3.9.3-4 图所示电路的电压 U_1 及电流 I_2。



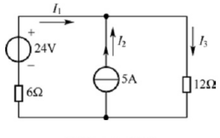
题 3.9.3-3 图



题 3.9.3-4 图

5. 试用支路电流法，求题 3.9.3-5 图电路中的电流 I_3。

6. 如题 3.9.3-6 图所示电阻电路，其中 $R_1 = 3\Omega$，$R_2 = 2\Omega$，$R_3 = 2\Omega$，$U_S = 7\text{V}$。求网孔电流 I_1 和 I_2 分别是多少？(要求用网孔分析法)

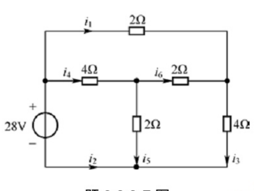


题 3.9.3-5 图

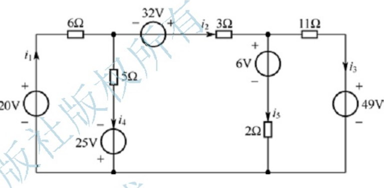
题 3.9.3-6 图

7. 用网孔分析法求题 3.9.3-7 图各支路电流。

8. 用网孔分析法求题 3.9.3-8 图各支路电流。



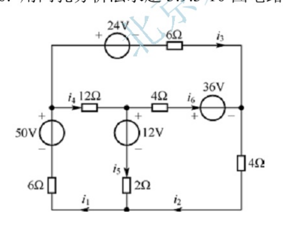
题 3.9.3-7 图



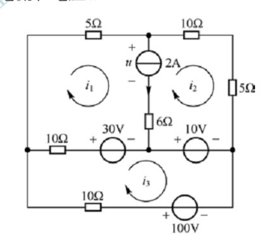
题 3.9.3-8 图

9. 用网孔分析法求题 3.9.3-9 图各支路电流。

10. 用网孔分析法求题 3.9.3-10 图电路中的网孔电流和电压 u。



题 3.9.3-9 图



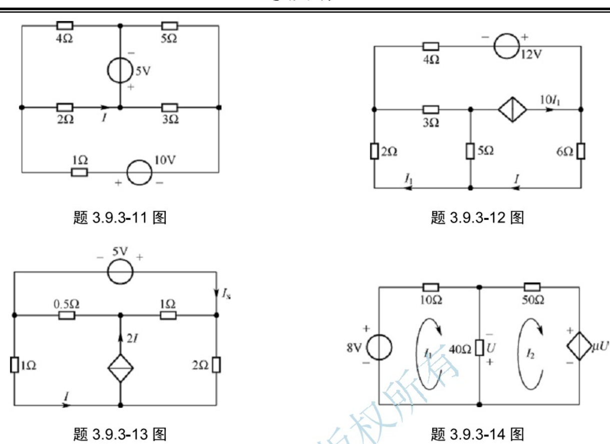
题 3.9.3-10 图

11. 用回路电流法求题 3.9.3-11 图所示电路的电流 I。

12. 用回路电流法求题 3.9.3-12 图所示电路的电流 I。

13. 用回路电流法求题 3.9.3-13 图所示电路的电流 I_x。

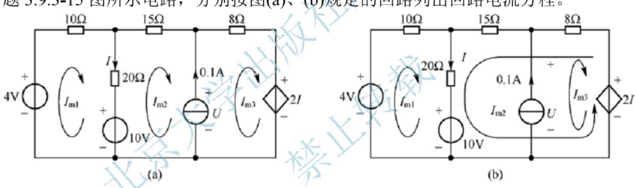
14. 题 3.9.3-14 图所示电路，列出回路电流方程，求 μ 为何值时电路无解。



题 3.9.3-11 图　　题 3.9.3-12 图

题 3.9.3-13 图　　题 3.9.3-14 图

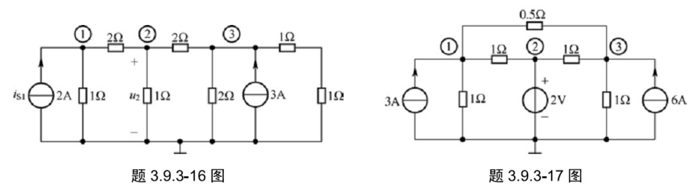
15. 题 3.9.3-15 图所示电路，分别按图(a)、(b)规定的回路列出回路电流方程。



题 3.9.3-15 图

16. 用节点分析法求题 3.9.3-16 图电路的节点电压。

17. 用节点分析法求题 3.9.3-17 图电路的节点电压。



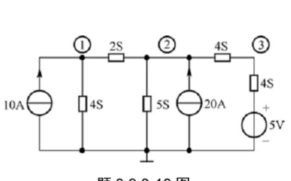
题 3.9.3-16 图　　题 3.9.3-17 图

18. 用节点分析法求题 3.9.3-18 图电路的节点电压。

19. 用节点分析法求题 3.9.3-19 图电路的节点电压。

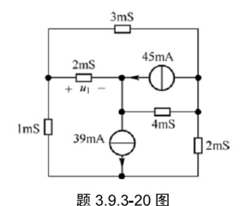
20. 用节点分析法求题 3.9.3-20 图电路的电压 u_1。

21. 用网孔分析法求题 3.9.3-21 图电路的网孔电流。

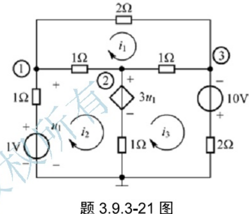


题 3.9.3-18 图

题 3.9.3-19 图

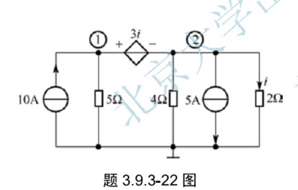


题 3.9.3-20 图

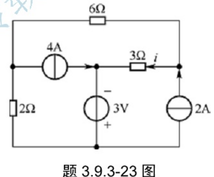


题 3.9.3-21 图

22. 用节点分析法求题 3.9.3-22 图电路的节点电压。
23. 电路如题 3.9.3-23 图所示。试只用一个回路方程求解电流 i 。

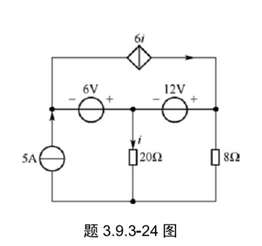


题 3.9.3-22 图

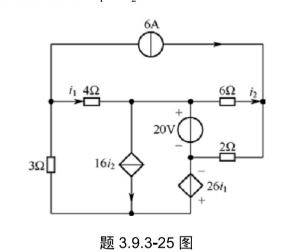


题 3.9.3-23 图

24. 电路如题 3.9.3-24 图所示。试只用一个回路方程求解电流 i 。
25. 电路如题 3.9.3-25 图所示。试分别列出一个回路方程求解 i_1 和 i_2 。

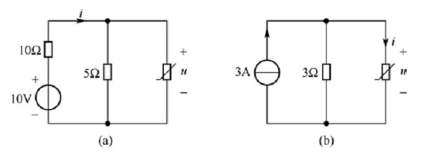


题 3.9.3-24 图



题 3.9.3-25 图

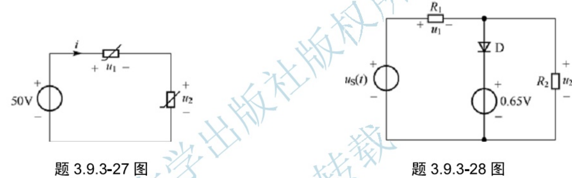
26. 图 3.9.3-26 所示电路中非线性电阻的电压电流特性为$i = 1.5u + u^2$。试分别利用曲线相交法和解析法求图中u和i。



题 3.9.3-26 图

27. 题 3.9.3-27 图中两个非线性电阻的 VCR 方程分别为$u_1 = 1.5u + i^2$和$u_2 = 3i^2$。试用曲线相交法和曲线相加法求i、u_1和u_2。

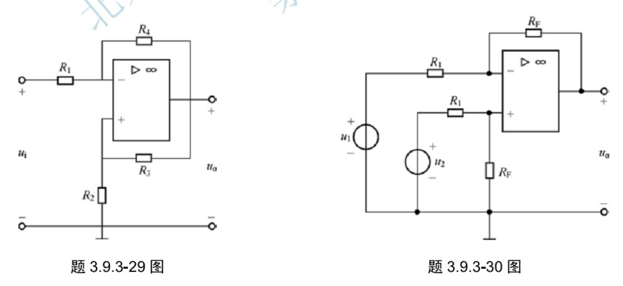
28. 题 3.9.3-28 图所示电路中，$R_1 = 10\Omega$，$R_2 = 20\Omega$，$u_S(t) = 1\cos 1000t\text{V}$。(1)用图解法求$u_1$，$u_2$的波形；(2)若 D 所模拟的二极管烧断了，重求$u_1$，$u_2$的波形。



题 3.9.3-27 图　　题 3.9.3-28 图

29. 题 3.9.3-29 图电路中的运放工作于线性区，求转移电压比$k = u_o / u_i$。

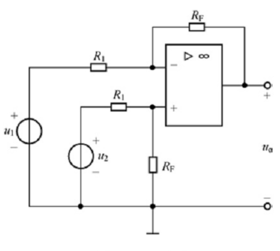
30. 题 3.9.3-30 图电路中的运放工作于线性区，求转移电流比$a = i_2 / i_1$。



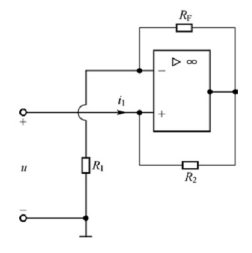
题 3.9.3-29 图　　题 3.9.3-30 图

31. 题 3.9.3-31 图电路中的运放工作于线性区，求输出电压u_o的表达式。

32. 题 3.9.3-32 图电路中的运放工作于线性区，求输入电阻$R_i = u / i$。

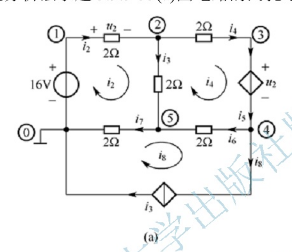


题 3.9.3-31 图

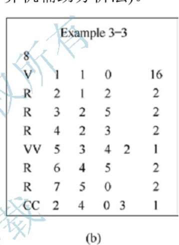


题 3.9.3-32 图

33. 用网孔分析法求题 3.9.3-33(a)图电路的网孔电流(计算机辅助分析法)。



(a)



Example 3-3

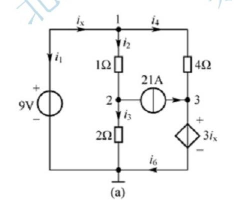
8

V	1	1	0		16
R	2	1	2		2
R	3	2	5		2
R	4	2	3		2
VV	5	3	4	2	1
R	6	4	5		2
R	7	5	0		2
CC	2	4	0	3	1

(b)

题 3.9.3-33 图

34. 求题 3.9.3-34(a)图电路的各支路电压电流和功率(计算机辅助分析法)。



(a)

Example 3-4

6

V	1	1	0		9
R	2	1	2		1
R	3	2	0		2
R	4	1	3		4
I	5	2	3		21
CV	6	3	0	1	−3

(b)

题 3.9.3-34 图

第 4 章　电路分析中的常用定理

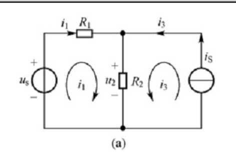
教学提示：一般来说，线性网络的分析方法有两种：一种是以 KCL、KVL 为基础的分析方法，就是前面所学的电路分析的基本方法，如等效变换法、支路电流法、网孔电流法、回路电流法、节点电压法等；另一种是应用电路定理的分析方法。应用电路定理可以将复杂电路化简或将电路的局部用简单电路等效替代，以使电路的计算得到简化。本章介绍电路分析中的几个常用定理，其中包括叠加定理、齐次性定理、替代定理、戴维南定理、诺顿定理、最大功率传输定理、特勒根定理和互易定理，以便进一步了解电路的基本性质，对电路进行简化和分析计算。

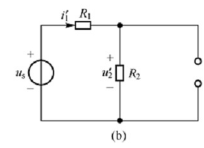
教学要求：通过本章的学习，使学生掌握叠加定理和齐次性定理并会应用其解决电路问题，理解替代定理，掌握戴维南定理、诺顿定理，能够熟练运用电路定理求解线性含源电阻单口网络电路的相关问题，理解负载获得最大功率的条件，了解特勒根定理、互易定理及其应用范围。

4.1　叠加定理和齐次性定理

4.1.1　叠加定理

描述线性电阻电路各电压电流关系的各种电路方程，是一组线性代数方程。例如网孔方程式(3.8)或节点方程式(3.15)，是以网孔电流或节点电压为变量的一组线性代数方程。作为电路输入或激励的独立电源，其 u_S 和 i_S 总是作为已知量出现在这些方程的右边。求解这些电路方程得到的各支路电流和电压(称为输出或响应)是独立电源 u_S 和 i_S 的线性函数。电路响应与激励之间的这种线性关系称为叠加性(或可加性)，它是线性电路的一种基本性质。现以图 4.l(a)所示的双输入电路为例来阐述叠加定理。





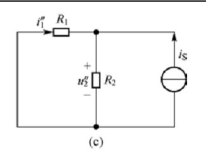


图 4.1　叠加定理举例

列出图 4.1(a)电路的网孔方程：

$$\left.\begin{aligned}(R_1+R_2)i_1+R_2i_3&=u_S\\ i_3&=i_S\end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$



求解式(4.1)可得到电阻 R_1 的电流 i_1 和电阻 R_2 上的电压 u_2

$$i_1 = \frac{1}{R_1 + R_2} u_S + \frac{-R_2}{R_1 + R_2} i_S = i_1' + i_1'' \tag{4.2}$$

式中，$i_1' = i_1 \big|_{i_S=0} = \dfrac{1}{R_1 + R_2} u_S$，$i_1'' = i_1 \big|_{u_S=0} = \dfrac{-R_2}{R_1 + R_2} i_S$

$$u_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_S + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_S = u_2' + u_2'' \tag{4.3}$$

式中，$u_2' = u_2 \big|_{i_S=0} = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} u_S$，$u_2'' = u_2 \big|_{u_S=0} = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_S$

从式(4.2)和式(4.3)可以看到：电流 i_1 和电压 u_2 均由两项相加而成。第一项 i_1' 和 u_2' 是该电路在独立电流源开路($i_S = 0$)时，由独立电压源单独作用所产生的 i_1 和 u_2，如图 4.1(b)所示。第二项 i_1'' 和 u_2'' 是该电路在独立电压源短路($u_S = 0$)时，由独立电流源单独作用所产生的 i_1 和 u_2，如图 4.1(c)所示。上述表明，由两个独立电源共同产生的响应，等于每个独立电源单独作用所产生响应之和。

推广到一般，如果有 m 个电压源、n 个电流源作用于线性电路，那么电路中某条支路的电流 i_j 和电压 u_j 可以表示为

$$i_j = H_{j1}u_{S1} + H_{j2}u_{S2} + \cdots + H_{jm}u_{Sm} + K_{j1}i_{S1} + K_{j2}i_{S2} + \cdots + K_{jn}i_{Sn} \tag{4.4}$$

$$u_j = H'_{j1}u_{S1} + H'_{j2}u_{S2} + \cdots + H'_{jm}u_{Sm} + K'_{j1}i_{S1} + K'_{j2}i_{S2} + \cdots + K'_{jn}i_{Sn} \tag{4.5}$$

式中，$u_{Sk}(k=1，2，3，\cdots，m)$ 表示电路中独立电压源的电压；$i_{Sl}(l=1，2，3，\cdots，n)$ 表示电路中独立电流源的电流。$H_{jk}, H'_{jk}(k=1，2，3，\cdots，m)$ 和 K_{jl}，$K'_{jl}(l=1，2，3，\cdots，n)$ 是常量，它们取决于电路的参数和输出变量的选择，而与独立电源无关。

例如，对图 4.1 电路中的输出变量 i_1 来说，由式(4.2)可得到

$$H_{11} = \frac{1}{R_1 + R_2} \qquad K_{11} = \frac{-R_2}{R_1 + R_2}$$

对输出变量 u_2 来说，由式(4.3)可得到

$$H'_{11} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \qquad K'_{11} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

线性电路的这种叠加性被称为叠加定理(superposition theorem)。**叠加定理归纳如下：在多个电源作用的线性电阻电路中，任一支路的电流或电压等于电路中每个独立源单独作用于电路产生的响应的代数和。所谓每一个电源单独作用是指其他独立源变为零(电压源短路，电流源开路)。**

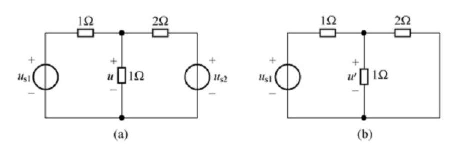
值得注意的是：线性电路中元件的功率并不等于每个独立电源单独产生功率之和。例如在双输入电路中某元件吸收的功率

$$p = ui = (u' + u'')(i' + i'') = u'i' + u'i'' + u''i' + u''i'' \neq u'i' + u''i'' = p_1 + p_2$$

叠加定理可以利用网孔电流法或节点电压法等来证明。关于叠加定理的严格证明可参阅其他教科书。

[例 4.1] 电路如图 4.2(a)所示。

若已知：(1) $u_{S1}=5V$，$u_{S2}=10V$；(2) $u_{S1}=10V$，$u_{S2}=5V$；(3) $u_{S1}=20\cos\omega tV$，$u_{S2}=15\sin 2\omega tV$。试用叠加定理计算电压 u。



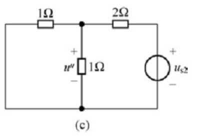


图 4.2　例 4.1 电路图

[解] 画出 u_{S1} 和 u_{S2} 单独作用的电路，如图 4.2(b)和图 4.2(c)所示，分别求出

$$u'=H_1u_{S1}=\frac{2/3}{1+2/3}u_{S1}=0.4u_{S1}$$

$$u''=H_2u_{S2}=\frac{0.5}{2+0.5}u_{S2}=0.2u_{S2}$$

根据叠加定理得

$$u=u'+u''=0.4u_{S1}+0.2u_{S2}$$

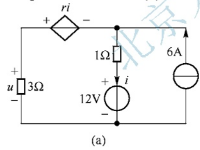
代入 u_{S1} 和 u_{S2} 数据，分别得到：

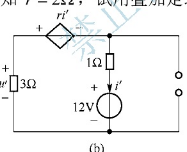
(1) 当 $u_{S1}=5V$，$u_{S2}=10V$ 时，$u=4V$；

(2) 当 $u_{S1}=10V$，$u_{S2}=5V$ 时，$u=5V$；

(3) 当 $u_{S1}=20\cos\omega tV$，$u_{S2}=15\sin 2\omega tV$ 时，$u=(8\cos\omega t+3\sin 2\omega t)V$。

[例 4.2] 电路如图 4.3(a)所示。已知 $r=2\Omega$，试用叠加定理求电流 i 和电压 u。





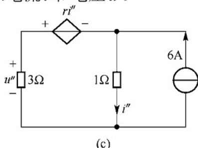


图 4.3　例 4.2 电路图

[解] 画出 12V 独立电压源和 6A 独立电流源单独作用的电路，如图 4.3(b)和图 4.3(c)所示。(注意在每个电路内均保留受控源，但控制量分别改为分电路中的相应量)。由图 4.3(b)电路，列出 KVL 方程

$$2i'+1i'+12V+3i'=0$$

解得

$$i'=-2A \qquad u'=-3i'=6V$$

由图 4.3(c)电路，列出 KVL 方程

$$2i''+1\cdot i''-3\cdot(6-i'')=0$$

解得

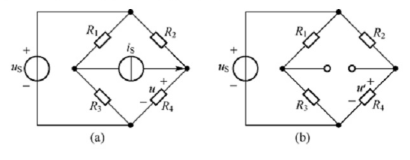
$$i''=3A \qquad u''=3(6A-i'')=9V$$

最后得到

$$i = i' + i'' = -2\text{A} + 3\text{A} = 1\text{A}$$

$$u = u' + u'' = 6\text{V} + 9\text{V} = 15\text{V}$$

[例 4.3] 用叠加定理求图 4.4(a)电路中电压 u 。



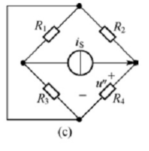


图 4.4　例 4.3 电路图

[解] 画出独立电压源 u_S 和独立电流源 i_S 单独作用的电路，如图 4.4(b)、图 4.4(c)所示。由此分别求得 u' 和 u'' ，然后根据叠加定理将 u' 和 u'' 相加得到电压 u

$$u' = \frac{R_4}{R_2 + R_4}u_S \qquad u'' = \frac{R_2R_4}{R_2 + R_4}i_S$$

$$u = u' + u'' = \frac{R_4}{R_2 + R_4}(u_S + R_2 i_S)$$

综上，我们在应用叠加定理时应注意以下几点：

(1) 叠加定理适用于线性电路，不适用于非线性电路；

(2) 在叠加的各个分电路中，不起作用的电源应置零，即在电压源处用短路代替，在电流源处用开路代替；

(3) 电路中所有电阻不要变动，受控源要保留；

(4) 叠加时各分电路的电压和电流的参考方向可以取为与原来电路中的相同，也可以相反，取和时应注意各个分量前的“+”、“−”号；

(5) 功率不能叠加。因为电阻消耗的功率 $P = I^2R = U^2G$ ，可见它不是电流(或电压)的一次函数。不过可用叠加定理先求得原电路的电压或电流后，再求功率。

4.1.2　齐次性定理

为了说明线性电路的齐次性(homogeneity)或比例性(proportionality)，下面先从一个简单的示例入手，如图 4.5 所示。从电路结构可以看出，各电流、电压为

$$i_1 = \frac{u_S}{R_1 + \dfrac{R_2R_3}{R_2 + R_3}}$$

$$i_2 = i_1\frac{R_3}{R_2 + R_3} = u_S\frac{R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}$$

$$u_{R3} = u_{R2} = R_2 i_2$$

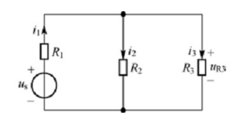


图 4.5　线性电路齐次性举例

可见， i_1 、 i_2 、 u_{R3} 与电源电压 u_S 成正比。

任一支路的电流、电压均与电源电压成正比，这一结果具有普遍意义。推广到一般，

如果有 m 个电压源、n 个电流源作用于线性电路，那么电路中某条支路的电流 i_j 或电压 u_j 可以表示为

$$i_j = K_{j1}u_{S1} + K_{j2}u_{S2} + \cdots + K_{jm}u_{Sm} + K_{j(m+1)}i_{S1} + K_{j(m+2)}i_{S2} + \cdots + K_{j(m+n)}i_{Sn} \tag{4.6}$$

$$u_j = K'_{j1}u_{S1} + K'_{j2}u_{S2} + \cdots + K'_{jm}u_{Sm} + K'_{j(m+1)}i_{S1} + K'_{j(m+2)}i_{S2} + \cdots + K'_{j(m+n)}i_{Sn} \tag{4.7}$$

式中，系数 $K_{jl}, K'_{jl}(l = 1,2,\cdots,m+n)$ 取决于电路的参数和结构，与激励源无关。若电路中的电阻均为线性且非时变，则系数 K_{jl}，K'_{jl} 为常数。可见 i_j (或 u_j)与激励源(u_S 和 i_S)成正比。

齐次性定理(homogeneity theorem)归纳如下：当所有独立电源都增大为原来的 k 倍时，各支路的电流或电压也同时增大为原来的 k 倍；如果只是其中一个独立电源增大为原来的 k 倍，则只是由它产生的电流分量或电压分量增大为原来的 k 倍。

齐次性与叠加性是线性电阻电路极其重要的性质。齐次性定理的严格证明可参阅其他教科书。

[例 4.4] 电路如图 4.6 所示。(1) 已知 $I_5 = 1\text{A}$，求各支路电流和电压源电压 U_S；

(2) 若已知 $U_S = 120\text{V}$，再求各支路电流。

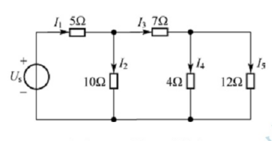


图 4.6　例 4.4 的图

[解] (1) 用 $2b$ 方程，由后向前推算

$$I_4 = \frac{12I_5}{4} = 3\text{A}$$

$$I_3 = I_4 + I_5 = 4\text{A}$$

$$I_2 = \frac{7I_3 + 12I_5}{10} = 4\text{A}$$

$$I_1 = I_2 + I_3 = 8\text{A}$$

$$U_S = 5I_1 + 10I_2 = 80\text{V}$$

(2) 当 $U_S = 120\text{V}$ 时，它是原来电压 80V 的 1.5 倍，根据线性电路齐次性可以断言，该电路中各电压和电流均增加到 1.5 倍，即

$$I_1 = 1.5\times 8\text{A} = 12\text{A} \qquad I_2 = I_3 = 1.5\times 4\text{A} = 6\text{A}$$

$$I_4 = 1.5\times 3\text{A} = 4.5\text{A} \qquad I_5 = 1.5\times 1\text{A} = 1.5\text{A}$$

[例 4.5] 求图 4.7 所示梯形电路的电压 U。

[解] 利用线性电路的齐次性求解。先假设所求电压 U' 为某值(尽可能使运算简单)，然后计算出电源电压 U'_S 的数值，根据齐次性定理有

$$\frac{U_S}{U} = \frac{U'_S}{U'}$$

由此式便可求得 U_S 作用下的电压 U。

图 4.7　例 4.5 电路图

假设 $U' = 2\text{V}$，由图中已知电阻值可得节点③的电压(不是真实值)

$$U'_3 = \frac{3}{2}U' = 3\text{V}$$

节点②的电压

$$U'_2 = \frac{1+6/5}{6/5}U'_3 = \frac{11}{6}U'_3 = \frac{11}{2}\text{V}$$

节点①的电压

$$U_1' = \frac{1+22/21}{22/21}U_2' = \frac{43}{22}U_2' = \frac{43}{4}\text{V}$$

此时的电源电压

$$U_S' = \frac{1+86/85}{86/85}U_1' = \frac{171}{86}U_1' = \frac{171}{8}\text{V}$$

所以

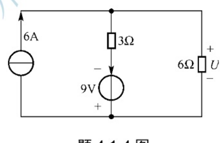
$$U = \frac{U'}{U_S'}U_S = \frac{2\times 8}{171}\times 10\text{V} = 0.936\text{V}$$

需要特别指出的是，齐次性定理与叠加定理是线性电路两个互相独立的性质，不能用叠加定理代替齐次性定理，也不能片面认为齐次性定理是叠加定理的特例。

思考与练习

4.1-1　为什么说由受控源和电阻构成的任何电路，其任一电流和电压值均为零？

(由受控源和电阻构成的任何电路中，受控源的大小是由控制支路的电压与电流控制的，而在由受控源和电阻构成的任何电路中的控制支路的电压与电流均为零，因此受控源也为零，其任意电压和电流均为零。)



题 4.1-4 图

4.1-2　应用叠加定理求单个电源单独作用于电路时，为什么要将其他电源置零(在电压源处短路，在电流源处开路)？

(应用叠加原理求单个电源单独作用于电路时，其他电源不起作用，电压源不起作用，即将其短路，电流源不起作用将其开路。)

4.1-3　请解释不能直接利用叠加定理求解功率的原因。

(因为：$p = ui = (u'+u'')(i'+i'') = u'i' + u''i'' + u'i'' + u''i'$

$$= p_1 + p_2 + u'i'' + u''i' \neq p_1 + p_2$$

所以，不能用叠加原理求功率。)

4.1-4　用叠加定理求题 4.1-4 图所示电路中的电压 U 。

($u = u'' + u'' = 12 + (-6) - = 6\text{V}$)

4.2　替 代 定 理

替代定理(substitution theorem)是集总参数电路理论中一个重要的定理。从理论上讲，无论线性、非线性、时变、非时变电路，替代定理都是成立的。不过在线性电路分析中替代定理应用更加普遍。这里着重讨论替代定理在线性电路分析中的应用。

下面先看一个例子。

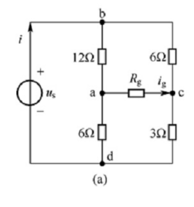
图 4.8(a)为一平衡电桥电路，桥路上电流 $i_g=0$，桥路两端电压 $u_{ac}=0$，若要计算电流 i，先来计算等效电阻 R_{bd}。因 $i_g=0$，故可以将 R_g 开路，如图 4.8(b)所示，于是得

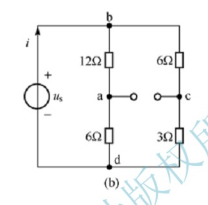
$$R_{bd}=\frac{(6+12)(6+3)}{(6+12)+(6+3)}\Omega=6\Omega$$

另一方面，由于 R_g 两端电压 $u_{ac}=0$，所以又可将 R_g 短路，如图 4.8(c)所示，从而有

$$R_{bd}=\frac{12\times6}{12+6}\Omega+\frac{6\times3}{6+3}\Omega=6\Omega$$

两种情况求得的 R_{bd} 是相同的，当然在 u_S 相同的条件下求得的电流 i 相同。





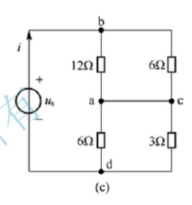


图 4.8　平衡电桥电路

这个例子说明，当某一支路上电流为零时，可以将其开路，当一支路两端电压为零时，可以将其短路。遇到分析这样的问题时，经开路或者短路后，电路的连接关系虽然发生了变化，但对电路的状态并无影响。由此联想到，若知道某条支路中不为零的电流，或某支路两端不为零的电压，该支路能否用某种方式替代而不影响其他部分的工作状态呢？替代定理圆满地回答了这个问题。

替代定理(又称置换定理)可表述为：具有唯一解的电路中，若知某支路 k 的电压为 u_k，电流为 i_k，且该支路与电路中其他支路无耦合，则无论该支路是由什么元件组成的，都可用下列任何一个元件去替代： □

(1) 电压等于 u_k 的理想电压源；

(2) 电流等于 i_k 的理想电流源；

(3) 阻值为 u_k/i_k 的电阻。

替代后不会影响电路各支路的电流和电压的数值。

设某电路共有 b 条支路构成，各支路电流分别为 i_1，i_2，…，i_k，…，i_b，各支路电压分别为 u_1，u_2，…，u_k，…，u_b，这些电流和电压分别满足 KCL 和 KVL。把电路中的第 k 条支路(该支路可能是一个电阻，也可能是一个电阻串电压源或电阻并电流源等)用电流 i_k 的电流源替代后，各支路的电流与替代前完全相同；替代后的第 k 条支路为电流源，它两端的电压由外电路确定，由于第 k 条支路以外的各支路电流数值不变，故它们的支路电压也不会变化，而各支路电压仍受 KVL 的约束，所以第 k 条支路的电压仍为替代前的电压 u_k。

替代定理可用图 4.9 所示电路来验证，对电路求解得：

$$I_2=0.5\text{A}\qquad U=15\text{V}$$

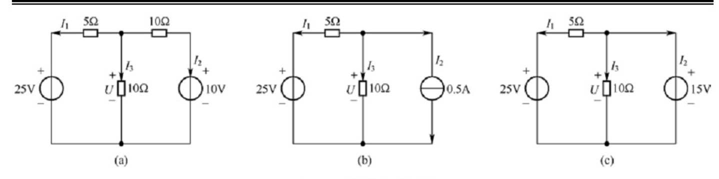


图 4. 9　替代定理示例

将最右侧支路用 0.5A 的电流源或用 15V 的电压源替代后，如图 4.9(b)、图 4.9(c)所示，用替代后的电路再求各支路电压、电流，其数值仍与替代前一样。即用三个图求得的各支路电压、电流都是一样的。

[例 4.6] 求图 4.10(a)所示电路各支路电流。

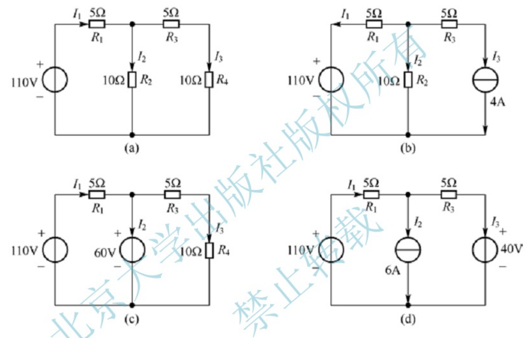


图 4.10　例 4.6 电路图

[解] 求图中各支路电流，先求得

$$I_1 = \frac{110}{5+\dfrac{10\times15}{10+15}}\text{A} = 10\text{A}$$

利用分流公式可求得　　$I_2 = 6\text{A}$　　$I_3 = 4\text{A}$

(1) 电阻 R_4 用电流源替代，如图 4.10(b)所示。利用节点电压法计算

$$\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}\right)U = \frac{110}{5} - 4$$

解得

$$U = 60\text{V}$$

所以有

$$I_1 = \frac{110-60}{5}\text{A} = 10\text{A}$$

$$I_2 = \frac{60}{10}\text{A} = 6\text{A}$$

$$I_3 = 4\text{A}$$

(2) 电阻 R_2 用电压源替代，如图 4.10(c)所示。对电路求解得

$$I_1 = \frac{110-60}{5}\text{A} = 10\text{A} \qquad I_3 = \frac{60}{15}\text{A} = 4\text{A} \qquad I_2 = I_1 - I_3 = 6\text{A}$$

(3) R_2 用电流源、R_4 用电压源替代，如图 4.10(d)所示。利用节点法求解得

$$\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)U = \frac{110}{5} - 6 + \frac{40}{5}$$

即

$$U = 60\text{V}$$

所以有

$$I_1 = \frac{110-60}{5} = 10\text{A} \qquad I_2 = 6\text{A} \qquad I_3 = \frac{60-40}{5} = 4\text{A}$$

三种替代，结果均相等。

思考与练习

4.2-1 替代定理适用的条件是什么？

(替代定理的适用条件是：具有唯一解的电路，需要替代的支路电压、支路电流与其他支路不存在耦合关系。)

4.2-2 若已知通过电压源支路的电流为2A，能否用电流为2A 电流源替代电压源？

(可以，满足替代定理的条件。)

4.3 戴维南定理

根据齐次性定理可知，对于一个不含独立电源、仅含电阻和受控源的单口网络，其端口输入电压和输入电流的比值为一个常量，这个比值就定义为该单口网络的输入电阻或等效电阻。所以这类单口网络可以用一个电阻支路等效置换。对于一个既含独立电源又含电阻和受控源的单口网络，它的等效电路是什么？本节介绍的戴维南定理和下一节诺顿定理将回答这个问题。为了叙述方便，将上述这类单口网络简称为“含源单口网络”，这里“含源”是指含独立电源。

如图 4.11(a)所示，N 为一个含源单口网络，有外电路与它连接。如果把外电路断开如图 4.11(b)所示，此时由于 N 内部含有独立电源，一般在端口 a-b 处将出现电压，这个电压称为 N 的开路电压，用 u_{oc} 表示。设把 N 中的全部独立电源置零，即把 N 中的独立电压源用短路替代，独立电流源用开路替代，并用 N_0 表示得到的单口网络。N_0 可以用一个等效电阻 R_{eq} 或 R_0 表示，此等效电阻等于 N_0 在端口 a-b 的输出电阻，如图 4.11(c)所示。

戴维南定理(Thevenin's theorem)可以这样表述：一个含独立电源、线性电阻和受控源的单口网络，对外电路来说，可以用一个电压源和电阻的串联组合等效置换，此电压源的电压等于单口网络的开路电压，电阻等于单口网络的全部独立电源置零后的等效电阻，如图 4.11(d)所示。

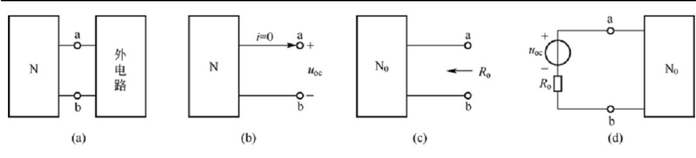


图 4.11　戴维南定理示意图

上述电压源和电阻的串联组合称为戴维南等效电路(Thevenin's equivalent circuit)，等效电路中的电阻有时称为戴维南等效电阻。当含源单口网络用戴维南等效电路置换后，端口以外的电路(以后称为外电路)中的电压、电流均保持不变。这种等效变换称为对外等效。

戴维南定理的证明如图 4.12 所示。

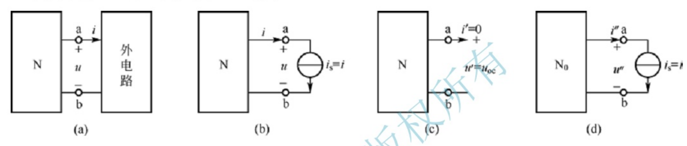


图 4.12　戴维南定理的证明过程

设图 4.12(a)所示电路在端口 a-b 处的电压为u，电流为i。根据替代定理，把外电路视为一条支路，并用电流为i的电流源替代，电路如图 4.12(b)所示。把图 4.12(b)所示电路的独立电源分为两部分，其中网络 N 中的所有独立电源作为一部分，另外一个部分就是替代后的电流源$i_S = i$。根据叠加定理，当网络 N 中的独立电源作用时，电路如图 4.12(c)所示，a-b 端口处的电压、电流为

$$u' = u_{oc} \qquad i' = 0$$

替代后的电流源$i_S = i$作用时，电路如图 4.12(d)所示，a-b 端口处的电压、电流为

$$u'' = -i''R_{ab} = -iR_o \qquad i'' = i$$

根据叠加定理得

$$u = u' + u'' = u_{oc} - R_o i$$

由此表达式可画出等效电路如图 4.13(b)所示。

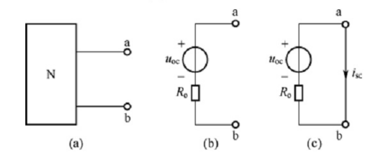


图 4.13　戴维南等效电路

戴维南定理得证。

根据戴维南定理只要分别计算出单口网络 N 的开路电压u_{oc}和单口网络内全部独立电源置零(独立电压源用短路代替及独立电流源用开路代替)时单口网络 N_0 的等效电阻R_o，就

可得到单口网络的戴维南等效电路，这样就可以大大简化电路。

戴维南等效电路中开路电压 u_{oc} 的计算，是含源单口网络端口开路时进行的，可根据具体电路利用所学方法求得。

等效电阻 R_o 的计算，如果含源单口网络不含受控源，令网络中所有独立源为零，可以运用电阻串并联等效求得。如含源单口网络含受控源电路时，可利用两种方法求等效电阻 R_o：

(1) 开短路法，在含源单口网络中分别求出开路电压 u_{oc} 和短路电流 i_{sc}，如图 4.13(c)所示

$$R_o = \frac{u_{oc}}{i_{sc}}$$

(2) 可采用外施激励法，先令网络中所用独立源为零，在端口加电压源或电流源，求出端口电流或电压，利用下式求得

$$R_o = \frac{u}{i}$$

[例 4.7] 求如图 4.14(a)所示单口网络的戴维南等效电路。

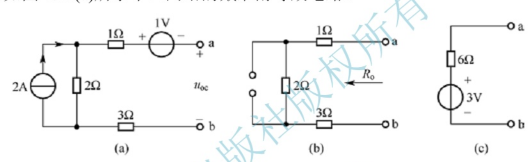


图 4.14　例 4.7 电路图

[解] 在单口网络的端口上标明开路电压 u_{oc} 的参考方向，注意到 $i=0$，可求得

$$u_{oc} = -1\text{V} + 2\Omega \times 2\text{A} = 3\text{V}$$

将单口网络内 1V 电压源用短路代替，2A 电流源用开路代替，得到图 4.14(b)电路，由此求得

$$R_o = 1\Omega + 2\Omega + 3\Omega = 6\Omega$$

根据 u_{oc} 的参考方向，即可画出戴维南等效电路，如图 4.14(c)所示。

[例 4.8] 求图 4.15(a)单口网络的戴维南等效电路。

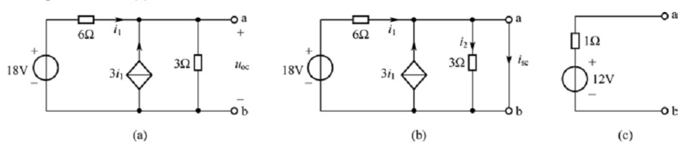


图 4.15　例 4.8 电路图

[解] 求 u_{oc} 的等效电路如图 4.15(a)所示。选 b 点接地，a 点的电压也就是 u_{oc}，列 a 点节点电压方程

$$(\frac{1}{6} + \frac{1}{3})u_{oc} = \frac{18}{6} + 3i_1 = 3 + 3i_1$$

而

$$i_1 = \frac{18 - u_{oc}}{6}$$

从以上两式中可解得

$$u_{oc} = 12\text{V}$$

为求 R_o，将 4.15(a)图 ab 端用短路线短接，并设短路电流为 i_{sc}，如图 4.15(b)所示。显然可得

$$i_2 = 0$$

$$i_1 = \frac{18}{6} = 3\text{A}$$

$$i_{sc} = i_1 + 3i_1 = 12\text{A}$$

故得

$$R_o = \frac{u_{oc}}{i_{sc}} = \frac{12}{12} = 1\Omega$$

该单口的戴维南等效电路如图 4.15(c)所示。

[例 4.9] 电路如图 4.16(a)所示。已知 $r = 2\Omega$，试求该单口网络的戴维南等效电路。

[解] 在图上标出 u_{oc} 的参考方向。先求受控源控制变量 i_1，用欧姆定律求得

$$i_1 = \frac{10\text{V}}{5\Omega} = 2\text{A}$$

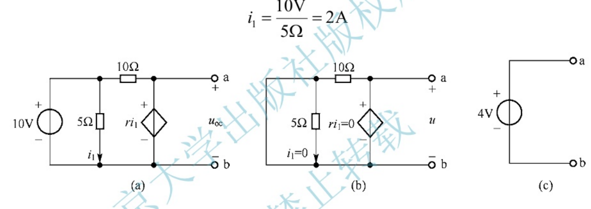


图 4.16　例 4.9 电路图

由 KVL 求得

$$u_{oc} = ri_1 = 2\Omega \times 2\text{A} = 4\text{V}$$

为求电阻 R_o 将 10V 电压源用短路代替，保留受控源，得到图 4.16(b)电路。再用外加电流源；计算端口电压 u 的方法，求电阻 R_o。由于 5Ω 电阻被短路，其电流 $i_1 = 0$，致使端口电压 $u = 2i_1 = 0$，与 i 为何值无关。由此求得

$$R_o = \frac{u}{i} = \frac{0}{i} = 0$$

这表明该单口等效为一个 4V 电压源，如图 4.16(c)所示。

戴维南定理在电路分析中得到广泛应用。由于含源电阻单口网络与其戴维南等效电路(电压源 u_{oc} 和电阻 R_o 的串联)端口的电压电流关系完全相同。当只对电路中某一条支路或几条支路(记为 N_L)的电压电流感兴趣时，可以将电路分解为 N_L 与 N 两个单口网络的连接，如图 4.17(a)所示。用两个元件构成的戴维南等效电路代替更复杂的含源单口 N，不会影响单口 N_L (不必是线性的或电阻性的)中的电压和电流。代替后的电路[见图 4.17(b)]规模减小，使电路的分析和计算变得更加简单。

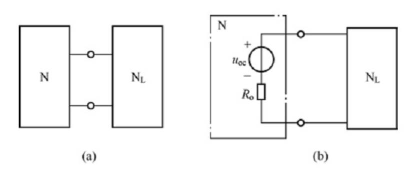


图 4.17　电路的分解

[例 4.10] 求图 4.18 所示电桥电路中电阻 R_L 的电流 i 。

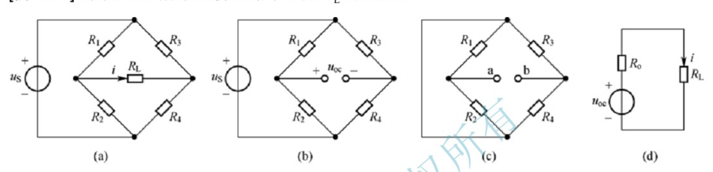


图 4.18　例 4.10 电路图

[解] 断开单口的负载电阻 R_L，得到图 4.18(b)电路，按所设 u_{oc} 的参考方向，用分压公式求得 u_{oc}

$$u_{oc} = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right) u_S \tag{4.8}$$

将独立电压源 u_S 用短路代替，得到图 4.18(c)电路，用电阻串并联公式求得

$$R_o = \left(\frac{R_2 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} \right) \tag{4.9}$$

用单口网络的戴维南等效电路代替单口网络，得到图 4.18(d)电路，由此求得

$$i = \frac{u_{oc}}{R_o + R_L} \tag{4.10}$$

式中，u_{oc} 和 R_o 由式(4.8)和式(4.9)确定。

此题若用网孔分析或节点方程求解，均需建立三个方程联立求解，而用戴维南定理则避免了这些复杂的运算，简化了电路分析。除此之外，从用戴维南定理方法求解得到的图 4.18(d)电路和式(4.10)中，还可以得出一些用其他网络分析方法难以得出的有用结论。例如要分析电桥电路的几个电阻参数在满足什么条件下，可使电阻 R_L 中电流 i 为零的问题，只须令式(4.10)分子为零，即

$$u_{oc} = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right) u_s = 0$$

由此求得

$$R_1 R_4 = R_2 R_3 \tag{4.11}$$

这就是常用的电桥平衡($i=0$)的公式。根据此式可从已知三个电阻值的条件下求得第四个未知电阻之值。图 4.18(a)电路可用来模拟很多实际的电阻电桥电路，在这些电桥中，常用灵敏度较高的检流计(用 R_L 模拟)来指示电桥是否达到平衡。

综上所述，可以总结出戴维南定理的注意事项和解题步骤：

(1) 只要得到线性含源单口网络的两个参数，开路电压 u_{oc} 和等效电阻 R_o，即可确定戴维南等效电路；

(2) 求含受控源的戴维南等效电路时，为了计及受控源的作用，通常采用先算开路电压 u_{oc}，再算短路电流 i_{sc} 的方法获得 R_o；$R_o=u_{oc}/i_{sc}$；注意求 u_{oc} 和 i_{sc} 时，含源单口网络内所有独立源须保留。

(3) 求含受控源电路的等效电阻 R_o 时，也可采用第 2 章中外加电压源求电流和外加电流源求电压的一般方法来解决；用外施激励法求等效电阻时，含源单口网络所有独立源置零。

(4) 对电路的某一元件感兴趣时(求其电压，电流，功率等)应用戴维南定理会带来很大方便。

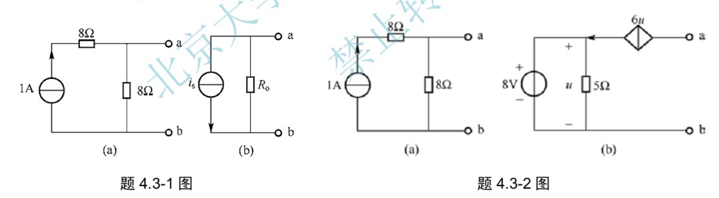
思考与练习

4.3-1　求题 4.3-1 图所示单口网络的戴维南等效电路。

((a) $u_{oc}=8\text{V}$， $R_o=8\Omega$；(b) $u_{oc}=-i_sR_o$)

4.3-2　能否求出题 4.3-2 图所示单口网络的戴维南等效电路？

((a)有，$u_{oc}=8\text{V}$，$R_o=8\Omega$；(b)因为端口电压不能确定，所以没有戴维南等效电路。)



题 4.3-1 图　　题 4.3-2 图

4.4　诺 顿 定 理

诺顿定理是独立于戴维南定理的，关于确定含源单口网络等效电路的网络定理。

诺顿定理可以表述为：一个含独立源线性电阻和受控源单口网络 N，对外电路来说，可以等效为一个电流源和电阻的并联，如图 4.19(a)所示。此电流源的电流等于单口网络从外部短路时的端口电流 i_{sc}；电阻 R_o 是单口网络内全部独立源为零值时所得网络 N_o 的等效电阻，如图 4.19(b)所示。

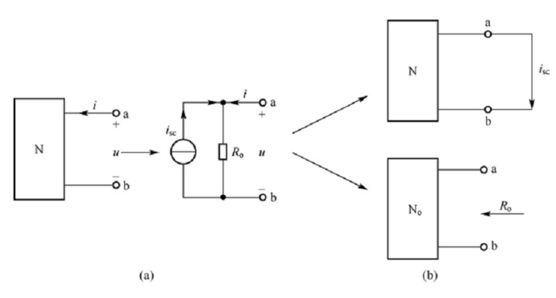


图 4.19　诺顿定理示例

i_{sc} 称为短路电流。R_o 也称为诺顿等效电阻，或称为输出电阻。电流源 i_{sc} 和电阻 R_o 的并联单口，称为单口网络的诺顿等效电路。在端口电压电流采用关联参考方向时，单口的 VCR 方程可表示为

$$i = \frac{1}{R_o}u - i_{sc} \tag{4.12}$$

诺顿定理的证明与戴维南定理的证明类似。在单口网络端口上外加电压源后，如图 4.20(a)所示，分别求出外加电压源单独产生的电流 $i' = u/R_o$，和单口网络内全部独立源产生的电流 $i'' = -i_{sc}$，如图 4.20(b)、图 4.20(c)所示，然后相加得到端口电压电流关系式：

$$i = i' + i'' = \frac{1}{R_o}u - i_{sc}$$

此式与式(4.12)完全相同。这就证明了含源线性电阻单口网络，在外加电压源存在唯一解的条件下，可以等效为一个电流源 i_{sc} 和电阻 R_o 的并联。只要分别求出单口网络的短路电流 i_{sc} 和单口网络 N_o 的等效电阻 R_o，就可得到诺顿等效电路。

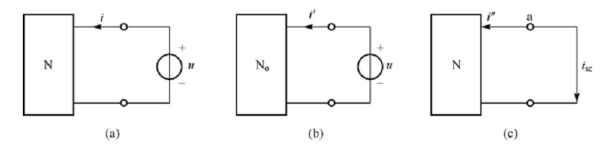


图 4.20　诺顿定理的证明

[例 4.11]　求图 4.21(a)所示单口网络的诺顿等效电路。

[解]　为求 i_{sc}，将单口网络从外部短路，并标明短路电流 i_{sc} 的参考方向，如图 4.21(a)所示。由 KCL 和 VCR 求得

$$i_{sc} = i_2 + i_3 + i_{S2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}i_{S1} + \frac{u_S}{R_3} + i_{S2}$$

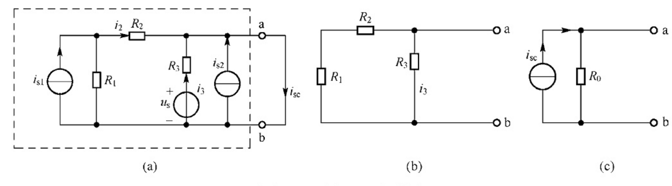


图 4.21　例 4.11 电路图

为求 R_o，将单口内电压源用短路代替，电流源用开路代替，得到图 4.21(b)所示电路，由此求得

$$R_o = \frac{(R_1 + R_2)R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

根据所设 i_{sc} 的参考方向，画出诺顿等效电路，如图 4.21(c)所示。若计算 i_{sc} 所采用的参考方向改为由 b 到 a，则诺顿等效电路中电流源电流的参考方向相应改为由 a 到 b。

[例 4.12]　求图 4.22(a)所示单口网络的诺顿等效电路和戴维南等效电路。

[解]　为求 i_{sc}，将单口网络短路，并设 i_{sc} 的参考方向如图 4.22(a)所示。用欧姆定律先求出受控源的控制变量 i_1 为

$$i_1 = \frac{10\text{V}}{5\Omega} = 2\text{A}$$

得到：

$$i_{sc} = 2i_1 = 4\text{A}$$

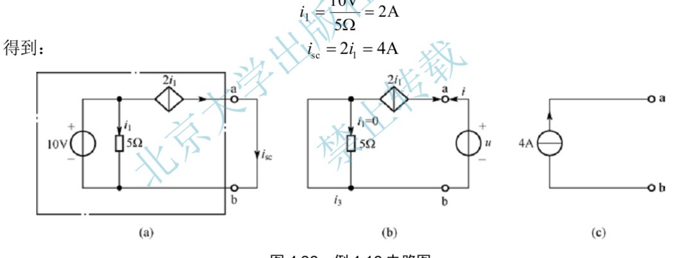


图 4.22　例 4.12 电路图

为求 R_o，将 10V 电压源用短路代替，在端口上外加电压源 u，求端口电流 i，如图 4.22(b)所示。由于 $i_1 = 0$，故

$$i = -2i_1 = 0$$

求得

$$G_o = \frac{i}{u} = 0 \qquad R_o = \frac{1}{G_o} = \infty$$

由 i_{sc}=4A 和 $R_o = \infty$ 可知，该单口网络等效为一个 4A 电流源，如图 4.22(c)所示。该单口求不出确定的 u_{oc}，它不存在戴维南等效电路。

在利用诺顿定理解题时步骤可以仿照戴维南定理的解题步骤，此外，还应该注意：

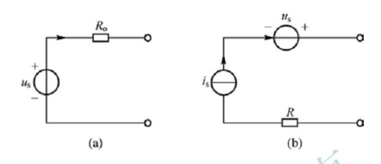
(1) 诺顿定理可由戴维南定理和等效电源定理推导出来；

(2) 只能等效为一个电流源的单口网络($R_{eq} = \infty$ 或 $G_{eq} = 0$)，只能用诺顿定理等效，不

能用戴维南定理等效；同理，只能等效为一个电压源的单口网络($R_{eq}=0$ 或 $G_{eq}=\infty$)，只能用戴维南定理等效，不能用诺顿定理等效。

思考与练习

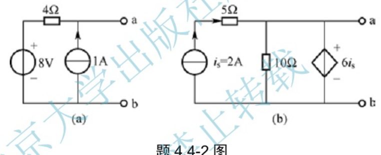
4.4-1　试求题 4.4-1 图所示单口的诺顿等效电路。



题 4.4-1 图

((a) $i_{sc}=\dfrac{u_s}{R_0}$；(b) $i_{sc}=i_{s0}$， $G_0=0$)

4.4-2　能否求出题 4.4-2 图所示单口网络的诺顿等效电路？为什么？



题 4.4-2 图

((a)有， $i_{sc}=3\text{A}$， $R_0=4\Omega$；(b)因为短路电流不能确定，所以没有诺顿等效电路。)

4.5　最大功率传输定理

实际中许多电子设备所用的电源，无论是直流稳压电源，还是各种波形的信号发生器，其内部电路结构都是相当复杂的，但它们在向外供电时都是引出两个端子接到负载。可以说它们就是一个含源单口网络。当所接负载不同时，单口网络传输给负载的功率也就不同。现在来讨论：对给定的含源单口网络，当负载为何值时网络传输给负载的功率最大呢？负载所能得到的最大功率又是多少呢？

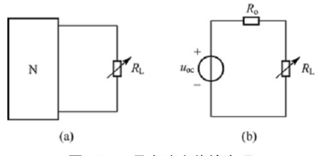


图 4.23　最大功率传输定理

为了回答这两个问题，将含源单口网络等效成戴维南电源模型，如图 4.23 所示。由图可知

$$i=\frac{u_{oc}}{R_o+R_L}$$

则电源传输给负载 R_L 的功率

$$P_L = R_L i^2 = R_L \left(\frac{u_{oc}}{R_o + R_L} \right)^2 \tag{4.13}$$

为了确定 P_L 的极值点，令 $dP_L / dR_L = 0$，即

$$\frac{dP_L}{dR_L} = u_{oc}^2 \frac{(R_L + R_o)^2 - 2R_L(R_L + R_o)}{(R_L + R_o)^4} = 0$$

解上式得

$$R_L = R_o \tag{4.14}$$

由上式可知，当 $R_L = R_o$ 时 P_L 有极大值。所以含源单口网络传输给负载的最大功率条件是：负载电阻 R_L 等于单口网络等效电源内阻 R_o。

将式(4.13)代入式(4.14)即可得到含源单口网络传输给负载的最大功率为

$$P_{L\max} = \frac{u_{oc}^2}{4R_o} \tag{4.15}$$

若含源单口网络等效为诺顿电源，如图 4.23 所示。读者可自行推导，同样可以得到当 $R_L = R_o$ 时单口网络传输给负载的功率最大，且此时最大功率为

$$P_{L\max} = \frac{1}{4} R_o i_{sc}^2 \tag{4.16}$$

最大功率传输定理可以表述为：含源线性电阻单口网络($R_o > 0$)向可变电阻负载 R_L 传输最大功率的条件是：负载电阻 R_L 与单口网络的输出电阻 R_o 相等。其中最大输出功率为 $P_{L\max} = \frac{u_{oc}^2}{4R_o}$，若含源单口网络等效为诺顿电源时单口网络传输给负载的最大功率为 $P_{L\max} = \frac{1}{4} R_o i_{sc}^2$。

通常，称 $R_L = R_o$ 为最大功率匹配(maximum power match)条件。这里应注意：不要把最大功率传输定理理解为要使负载功率最大，应使戴维南等效电源内阻 R_o 等于 R_L。由图 4.23 不难看出：当 R_L 一定、u_{oc} 一定而改变 R_o 的话，显然只有当 R_o=0 时方能使负载 R_L 上获得最大功率；也不要把 R_o 上消耗的功率当作单口网络内部消耗的功率。联系在前面所学的等效的概念不难理解这个问题。因为含源单口网络和它的等效电路——戴维南等效源，就内部功率而言一般是不等效的，它们相互代换只是对外部电路的电流、电压、功率等效。所以戴维南等效电源中内阻 R_o 上消耗的功率一般不等于含源单口网络内部消耗的功率。

[例 4.13] 电路如图 4.24(a)所示。试求：(1) R_L 为何值时获得最大功率；(2) R_L 获得的最大功率；(3) 10V 电压源的功率传输效率。

[解] (1) 断开负载 R_L，求得单口网络 N_1 的戴维南等效电路参数为

$$u_{oc} = \frac{2}{2+2} \times 10\text{V} = 5\text{V} \qquad R_o = \frac{2 \times 2}{2+2}\Omega = 1\Omega$$

如图 4.24(b)所示，由此可知当 $R_L = R_o = 1\Omega$ 时可获得最大功率。

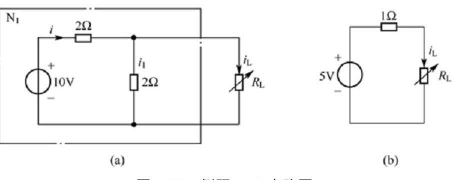


图 4.24　例题 4.13 电路图

(2) 由式(4.15)求得 R_L 获得的最大功率

$$p_{max} = \frac{u_{oc}^2}{4R_o} = 6.25\text{W}$$

(3) 先计算10V 电压源发出的功率。当 $R_L = 1\Omega$ 时

$$i_L = \frac{u_{oc}}{R_o + R_L} = 2.5\text{A}$$

$$u = R_L i_L = 2.5\text{V}$$

$$i = i_1 + i_L = \left(\frac{2.5}{2} + 2.5\right)\text{A} = 3.75\text{A}$$

10V 电压源发出的功率为

$$P = 10 \times 3.75 = 37.5\text{W}$$

因此，10V 电压源发出 37.5W 功率，电阻 R_L 吸收功率 6.25W，其功率传输效率为

$$\eta = \frac{6.25}{37.5} \approx 16.7\%$$

[例 4.14] 求如图 4.25(a)所示单口网络向外传输的最大功率。

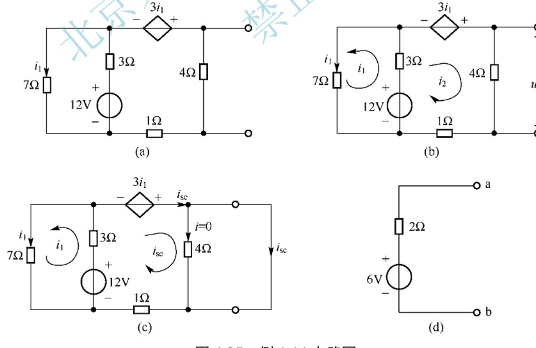


图 4.25　例 4.14 电路图

[解] 为求 u_{oc}，按图 4.25(b)所示网孔电流的参考方向，列出网孔方程：

$$10i_1 + 3i_2 = 12$$

$$3i_1 + 8i_2 = 12 + 3i_1$$

解得

$$i_2 = 1.5\text{A} \qquad u_{\text{oc}} = 4i_2 = 6\text{V}$$

为求 i_{sc}，按图 4.25(c)所示网孔电流的参考方向，列出网孔方程

$$10i_1 + 3i_{\text{sc}} = 12$$

$$3i_1 + 4i_{\text{sc}} = 12 + 3i_1$$

解得

$$i_{\text{sc}} = 3\text{A}$$

则 R_{o} 为

$$R_{\text{o}} = \frac{u_{\text{oc}}}{i_{\text{sc}}} = \frac{6}{3}\Omega = 2\Omega$$

得到单口网络的戴维南等效电路，如图 4.25(d)所示。由式(4-14)或式(4-15)求得最大功率。

$$P_{\max} = \frac{u_{\text{oc}}^2}{4R_{\text{o}}} = \frac{6^2}{4\times 2}\text{W} = 4.5\text{W} \quad \text{或} \quad P_{\max} = \frac{R_{\text{o}} i_{\text{sc}}^2}{4} = \frac{2\times 3^2}{4}\text{W} = 4.5\text{W}$$

在利用最大功率传输定理时应该注意：

(1) 功率最大时，$R_{\text{L}} = R_{\text{o}}$，此时认为 R_{o} 固定不变，R_{L} 可调；

(2) 若 R_{o} 可调，R_{L} 固定不变，则随着 R_{o} 减小，R_{L} 获得的功率增大，当 R_{o}=0 时，负载 R_{L} 获得最大功率 $P_{\max}$；

(3) 理论上，传输的效率

$$\eta = \frac{R_{\text{L}}\text{的功率}P_{\max}}{\text{等效电源}u_{\text{oc}}\text{产生的功率}} \times 100\% = 50\%$$

但实际上含源单口网络和它的等效电路就它的内部而言功率不等效，因此，R_{o} 算得的功率一般不等于网络内部消耗的功率，即 $\eta \neq 50\%$。

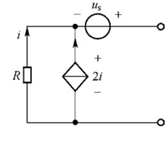
思考与练习

4.5-1 当负载 R_{L} 固定不变，问单口网络的输出电阻 R_{o} 为何值，R_{L} 可获得最大功率？

($R_{\text{o}} = 0 \Rightarrow P_{\max} = \dfrac{u^2}{R_{\text{L}}}$)

4.5-2 求题 4.5-2 图所示单口网络输出最大功率的条件。

(受控电流源，$R_{\text{o}} = \dfrac{u'}{i'} = \dfrac{1}{3}R$，即负载 $R_{\text{L}} = \dfrac{1}{3}R$ 时，输出功率最大。)



题 4.5-2 图

*4.6 特勒根定理

特勒根定理(Tellegen’s theorem)自 20 世纪 50 年代初问世以来，科学家对它的应用进行了多方面的研究，目前正在发展之中。特勒根定理是电路理论中一个重要的定理，它适用

于任何集总参数电路，它只与电路的结构有关而与支路性质无关，即特勒根定理适用的范围与基尔霍夫定律相同。虽然特勒根定理的提出比 KCL 和 KVL 迟了很多年，但已越来越显示出其重要作用。

先考查一个例子，在图 4.26(a)所示电路中，已知 4 条支路电流 $i_1 = i_2 = 3\text{A}$，$i_3 = 1\text{A}$，$i_4 = 2\text{A}$；各支路电压和电流为关联参考方向，其电压为 $u_1 = -30\text{V}$，$u_2 = 24\text{V}$，$u_3 = u_4 = 6\text{V}$。各支路电流和各支路电压分别满足 KCL 和 KVL。如果把各支路电流与其相应的支路电压相乘再求和，根据功率守恒，其结果等于零，可计算验证。

$$\sum_{k=1}^{4} u_k i_k = -30\times3 + 24\times3 + 6\times1 + 6\times2 = 0$$

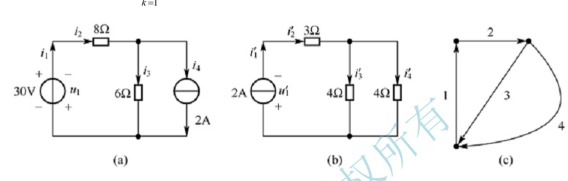


图 4.26　特勒根定理示例

再看图 4.26(b)所示电路，并与图 4.26(a)电路作比较，它们由不同的元件构成，但具有相同的拓扑图如图 4.26(c)所示。可以求出图 4.26(b)的各支路电压与电流为

$$i_1' = 2\text{A} \qquad i_2' = 2\text{A} \qquad i_3' = 1\text{A} \qquad i_4' = 1\text{A}$$
$$u_1' = -10\text{V} \qquad u_2' = 6\text{V} \qquad u_3' = 4\text{V} \qquad u_4' = 4\text{V}$$

把图 4.26(b)电路各支路电流与其相应的支路电压相乘再求和，其结果也等于零。这个结果说明电路中各支路功率的代数和等于零，即功率守恒。

注意：现在将图 4.26(a)的各支路电流与图 4.26(b)各相应支路的电压相乘并求和：

$$\sum_{k=1}^{4} u_k' \cdot i_k = -10\times3 + 6\times3 + 4\times1 + 4\times2 = 0$$

其结果也等于零；反之将图 4.26(b)的各支路电流与图 4.26(a)各相应支路的电压相乘并求和：

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \cdot i_k' = -30\times2 + 24\times2 + 6\times1 + 6\times1 = 0$$

其结果也等于零。这个结果看似不好理解，但恰恰是特勒根定理所描述的一种拓扑性质。本例是特勒根定理的一个验证。特勒根定理有两种形式。

4.6.1 特勒根定理一

对于一个具有 n 个节点，b 条支路的网络，假设各支路电压（u_k）和支路电流（i_k）取关联参考方向，则有

$$\boxed{\sum_{k=1}^{b} u_k i_k = 0} \tag{4.17}$$

该定理通过图 4.27 所示网络证明如下：

以节点④为参考点，节点①、②、③的节点电压分别为 u_{n1}、u_{n2}、u_{n3}，图中箭头方向既表示支路电压方向也表示支路电流方向，根据 KVL 可得各支路电压与节点电压的关系式：

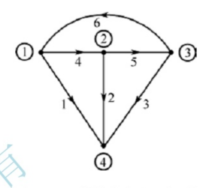


图 4.27 特勒根定理一证明

$$u_1 = u_{n1}$$
$$u_2 = u_{n2}$$
$$u_3 = u_{n3}$$
$$u_4 = u_{n1} - u_{n2}$$
$$u_5 = u_{n2} - u_{n3}$$
$$u_6 = u_{n3} - u_{n1}$$

根据 KCL 可得出节点①、②、③的电流方程为

$$i_1 + i_4 - i_6 = 0$$
$$i_2 - i_4 + i_5 = 0$$
$$i_3 - i_5 + i_6 = 0$$

那么

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{6} u_k i_k &= u_1 i_1 + u_2 i_2 + u_3 i_3 + u_4 i_4 + u_5 i_5 + u_6 i_6 \\ &= u_{n1} i_1 + u_{n2} i_2 + u_{n3} i_3 + (u_{n1} - u_{n2}) i_4 + (u_{n2} - u_{n3}) i_5 + (u_{n3} - u_{n1}) i_6 \\ &= u_{n1}(i_1 + i_4 - i_6) + u_{n2}(i_2 - i_4 + i_5) + u_{n3}(i_3 - i_5 + i_6) = 0\end{aligned} \tag{4.18}$$

将以上证明过程推广到具有 n 个节点，b 条支路的网络，则有

$$\sum_{k=1}^{b} u_k i_k = 0 \tag{4.19}$$

从特勒根定理一的证明可以看出，该定理是基于 KCL、KVL 推导出来的，也就是说特勒根定理与基尔霍夫定律一样，无论电路线性与否，只要是集中参数电路它就是适用的。

特勒根定理的物理意义就在于它反映了电路的功率守恒特性。即任何一个电路，各支路吸收的功率的代数和等于零。故特勒根定理又被称为功率守恒定理。

4.6.2 特勒根定理二

具有同一拓扑图的两个网络 N 和 N′，它们的支路电压分别为 u_k 和 u'_k，支路电流分别为 i_k 和 i'_k（均取关联参考方向），则对任何时刻 t，有

$$\boxed{\sum_{k=1}^{b} u_k(t) i'_k(t) = 0}, \quad \boxed{\sum_{k=1}^{b} u'_k(t) i_k(t) = 0} \tag{4.20}$$

其证明过程与定理一相同，故不再证明。需要说明的是特勒根定理二没有物理意义，它只是反映了两个具有同一拓扑图的网络，其电压与电流的数学关系。但由于其乘积具有功率的量纲，所以又称为似功率守恒定理。另外，对于同一个网络，如果支路电压 u_k 和电流 i_k 取值不在同一时刻，那么下面两式同样成立：



$$\left.\begin{aligned}\sum_{k=1}^{b}u_k(t_1)i_k(t_2)=0\\ \sum_{k=1}^{b}u_k(t_2)i_k(t_1)=0\end{aligned}\right\}\tag{4.21}$$

此时可将两个不同时刻的数值视为拓扑图相同的两个网络。

[例 4.15] N 网络由线性电阻组成。已知电路如图 4.28 所示，$U_1=6\text{V}$，$R_2=2\Omega$ 时，测得 $I_1=2\text{A}$，$U_2=2\text{V}$；U_1=10V，$R_2'=4\Omega$ 时，测得 I_1=3A，求此时 U_2 的值。

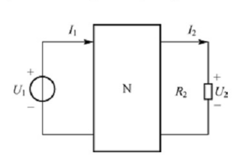


图 4.28　例 4.15 电路图

[解] 将两次测量所对应的电路看成两个具有相同拓扑图的电路，分别视为 N 和 N′，根据特勒根定理二知：

$$-U_1'I_1+U_2'I_2+\sum_{k=3}^{b}U_k'I_k=0\tag{1}$$

$$-U_1I_1'+U_2I_2'+\sum_{k=3}^{b}U_kI_k'=0\tag{2}$$

由于网络 N 由线性电阻构成，求和式中

$$U_kI_k'=RI_kI_k'=RI_k'I_k=U_k'I_k$$

式(1)减去式(2)，得

$$-U_1'I_1+U_2'I_2=-U_1I_1'+U_2I_2'\tag{3}$$

将 $U_1'=6\text{V}$，$I_1'=2\text{A}$，$U_2'=2\text{V}$，$I_2'=\dfrac{U_2'}{R_2'}=\dfrac{2}{2}=1\text{A}$，$U_1=10\text{V}$，$I_1=3\text{A}$，$I_2=\dfrac{U_2}{R_2}=\dfrac{U_2}{4}$

代入式(3)得

$$-6\times3+2\times\left(\frac{U_2}{4}\right)=-10\times2+U_2\times1$$

整理得

$$-18+\frac{U_2}{2}=-20+U_2$$

所以

$$U_2=4\text{V}$$

思考与练习

4.6-1　查阅相关参考书试证明特勒根定理二。

4.6-2　特勒根定理的使用范围是什么？

(适用于集总参数电路，属于拓扑约束，与 KVL，KCL 应用范围相同。)

4.7　互 易 定 理

互易定理(reciprocity theorem)是电路分析中的重要定理。可粗略地表述为：在线性无源网络中，若只有一个独立源工作，将该网络的激励和响应的位置互换，网络对相同激励下的响应不变，该性质称为网络的互易性。互易性广泛应用于网络的灵敏度分析，测量技术等方面。

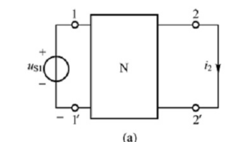
并非所有的线性网络都具有互易性，一般只有那些不含有受控源、独立电源的线性非时变网络才具有这种性质，因此互易定理使用的范围较窄。互易定理有三种形式，分别是互易定理一、互易定理二和互易定理三，下面分别讨论。

4.7.1　互易定理一

对于图 4.29 所示两电路，当在 $1-1'$ 之间加电压源 u_{S1}，在 $2-2'$ 之间的短路电流为 i_2，如图 4.29(a)所示；当在 $2-2'$ 之间加电压源 u_{S2}，在 $1-1'$ 之间的短路电流为 i_1，如图 4.29(b)所示，则有

$$\frac{i_2}{u_{S1}}=\frac{i_1}{u_{S2}} \tag{4.22}$$

当 $u_{S2}=u_{S1}$ 时，$i_1=i_2$。



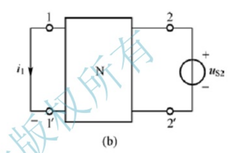


图 4.29　互易定理一

互易定理一表明：对于不含受控源的单一激励的线性电阻电路，将激励(电压源)与响应(电流)的位置互换，其响应与激励的比值仍然保持不变。当激励 $u_{S1}=u_{S2}$ 时，$i_1=i_2$。

证明： 将图 4.29(a)中的电路变量标出，如图 4.30(a)所示，激励与响应互换以后如图 4.30(b)所示，应用特勒根定理二，有

$$u_{S1}i_1+0\times i_2'=0\times i_1'+u_{S2}i_2 \qquad u_{S1}i_1=u_{S2}i_2$$

所以

$$\frac{i_2}{u_{s1}}=\frac{i_1}{u_{s2}}$$

当 $u_{S2}=u_{S1}$ 时，$i_1=i_2$，证毕。

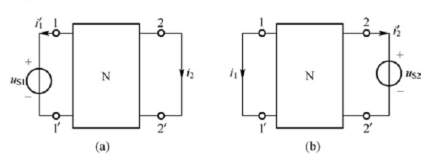


图 4.30　互易定理的证明

4.7.2　互易定理二

对于图 4.31 所示两电路，当在 $1-1'$ 之间加电流源 i_{S1} 时，在 $2-2'$ 之间的开路电压为 u_2，如图 4.31(a)所示；当在 $2-2'$ 之间加电流源 i_{S2}，在 $1-1'$ 之间的开路电压为 u_1，如图 4.31(b)所示，则有

$$\frac{u_2}{i_{S1}} = \frac{u_1}{i_{S2}} \tag{4.23}$$

当 $i_{S2} = i_{S1}$ 时，$u_1 = u_2$。

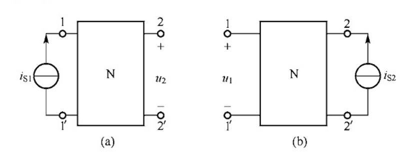


图 4.31　互易定理二

互易定理二表明：对于不含受控源的单一激励的线性电阻电路，将激励(电流源)与响应(电压)的位置互换，其响应与激励的比值仍然保持不变。当激励 $i_{S2} = i_{S1}$ 时，$u_1 = u_2$。

4.7.3　互易定理三

对于如图 4.32 所示两电路，当在 $1-1'$ 之间加电压源 u_{S1} 时，在 $2-2'$ 之间的开路电压为 u_2，如图 4.32(a)所示；当在 $2-2'$ 之间加电流源 i_{S2}，在 $1-1'$ 之间的短路电流为 i_1，如图 4.32(b)所示，则有

$$\frac{u_2}{u_{S1}} = \frac{i_1}{i_{S2}} \tag{4.24}$$

当激励 $|u_{S1}|=|i_{S2}|$ 时，则 $|u_2|=|i_1|$。

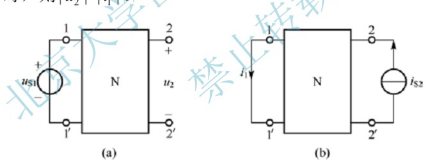


图 4.32　互易定理三

互易定理三表明：对于不含受控源的单一激励的线性电阻电路，将激励与响应的位置互换，且把原电压源激励改换为电流源激励，把原电压响应改换为电流响应，则互易位置前后响应与激励的比值仍然保持不变。如果在数值上 $|i_{S2}|=|u_{S1}|$ 时，则 $|i_1|=|u_2|$。

互易定理二，互易定理三与互易定理一的证明方法类似，可自行证明。

值得指出的是，在应用互易定理时，应注意实际电路有关电压、电流参考方向与上述每种情况下电路中所设电压、电流参考方向的对应关系。

[例 4.16]　如图 4.33 所示电路，已知图 4.33(a)中 $u_{S1} = 1\text{V}$，$i_2 = 2\text{A}$；图 4.33(b)中 $u_{S2} = -2\text{V}$，求电流 i_1。

[解]　图 4.33(a)的端子 1、2 均为正极性端，而图 4.33(b)的端子 1、2 为反极性端。根据互易定理一知：

$$\frac{i_2}{u_{S1}} = \frac{-i_1}{u_{S2}}$$

所以
$$i_1 = -\frac{u_{S2}}{u_{S1}} i_2 = -\frac{-2}{1} \times 2 = 4\text{A}$$

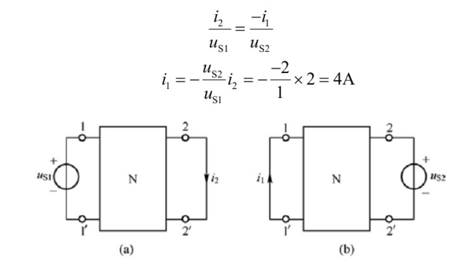


图 4.33 例 4.16 电路图

[例 4.17] 已知在下图 4.34 所示的电路中，图 4.34(a)电路在电压源 u_{S1} 的作用下，电阻 R_2 上的电压为 u_2 。求图 4.34(b)电路在电流源 i_{S2} 的作用下，电流 i_1 的值。

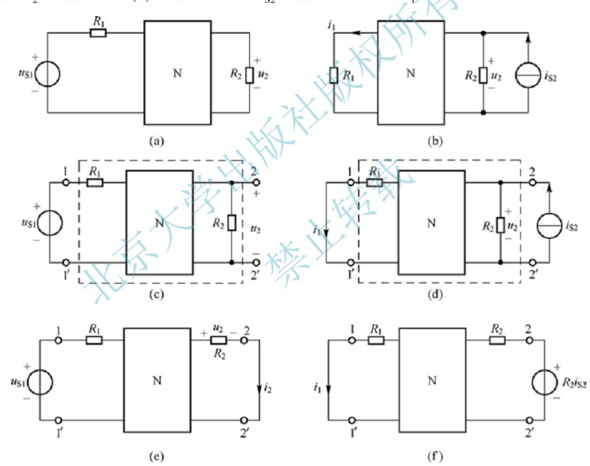


图 4.34 例 4.17 电路图

[解] 方法一 将电阻 R_1、R_2 和网络 N 当做一个新的电阻网络，如图 4.34(c)、图 4.34(d)中虚线框所示。此时可直接利用互易定理三的表达式求解

$$\frac{i_1}{i_{S2}} = \frac{u_2}{u_{S1}}$$

所以
$$i_1 = \frac{u_2}{u_{S1}} i_{S2}$$

方法二　改变电路的画法，即可与互易定理一的电路对应起来，如图 4.34(e)、图 4.34(f)所示。不难得出

$$\frac{i_2}{u_{S1}} = \frac{i_1}{R_2 i_{S2}}$$

而

$$i_2 = \frac{u_2}{R_2}$$

所以

$$i_1 = \frac{R_2 i_{S2}}{u_{S1}} \cdot \frac{u_2}{R_2} = \frac{i_{S2}}{u_{S1}} \cdot u_2$$

思考与练习

4.7-1　查阅相关参考书，试证明互易定理二、互易定理三。

4.7-2　讨论互易定理的适用范围。

(适用于不含有受控源和独立源的线性电阻网络。)

4.8　小　结

1. 叠加定理

在多个电源作用的线性电路中，任一支路的电压、电流响应等于电路中每个独立源单独作用于电路产生响应的代数和。所谓每一个电源单独作用是指其他独立源变为零(电压源短路，电流源开路)。这是叠加定理。

当所有独立电源都增大(或减小)为原来的 k 倍时，各支路的电流或电压响应也同时增大(或减小)为原来的 k 倍；如果只是其中一个独立电源增大为原来的 k 倍，则只是由它产生的电流分量或电压分量增大为原来的 k 倍，这是齐次性定理。当电路只有一个独立源作用时，响应与激励成正比。

2. 替代定理

具有唯一解的电路中，若知某支路 k 的电压为 u_k，电流为 i_k，且该支路与电路中其他支路无耦合，则无论该支路是由什么元件组成的，都可用(1) 电压等于 u_k 的理想电压源；(2) 电流等于 i_k 的理想电流源；(3) 阻值为 u_k / i_k 的电阻去替代，替代后不会影响电路各支路的电流和电压的数值。

替代定理在戴维南定理和诺顿定理的证明、电路的暂态分析以及二端口网络中均有应用。

3. 戴维南定理

一个含独立电源、线性电阻和受控源的单口网络，对外电路来说，可以用一个电压源和电阻的串联组合等效置换，此电压源的电压等于单口网络的开路电压，电阻等于单口网络内的全部独立电源置零后的等效电阻。

4. 诺顿定理

含独立源的线性电阻单口网络，对外电路来说，可以等效为一个电流源和电阻的并联。电流源的电流等于单口网络端口短路时的端口短路电流；电阻等于单口网络内全部独立源为零值时所得网络的等效电阻。

5. 最大功率传输定理

含源线性电阻单口网络(R_o>0)向可变电阻负载 R_L 传输最大功率的条件是：负载电阻 R_L 与单口网络的输入电阻 R_o 相等。其中最大输出功率为 $P_{Lmax}=\dfrac{u_{oc}^2}{4R_o}$，若有源单口网络等效为诺顿电源时单口网络传输给负载的最大功率为 $P_{Lmax}=\dfrac{1}{4}R_o i_{sc}^2$。

6. 特勒根定理

特勒根定理是基于 KCL、KVL 推导出来的，也就是说特勒根定理与基尔霍夫定律一样，无论电路线性与否，只要是集中参数电路它就是适用的。特勒根定理有两种形式。

1) 特勒根定理一

对于一个具有 n 个节点、b 条支路的网络，假设各支路电压(u_k)和支路电流(i_k)取关联方向，则有：$\sum\limits_{k=1}^{b} u_k i_k=0$。

2) 特勒根定理二

具有同一拓扑图的两个网络 N 和 N′，它们的支路电压分别为 u_k 和 u'，支路电流分别为 i_k 和 i'_k (均取关联参考方向)，则对任何时刻 t，有：$\sum\limits_{k=1}^{b} u_k(t)i'_k(t)=0$ 或 $\sum\limits_{k=1}^{b} u'_k(t)i_k(t)=0$。

7. 互易定理

互易定理是电路分析中的重要定理，互易性是线性电路的重要性质之一。而且并非所有的线性网络都具有互易性，一般只有那些不含有受控源、独立电源的线性非时变网络才具有这种性质，因此互易定理使用的范围较窄。互易定理有三种形式。

1) 互易定理一

对于不含受控源的单一激励的线性电阻电路，互易激励(电压源)与响应(电流)的位置，其响应与激励的比值仍然保持不变。

2) 互易定理二

对于不含受控源的单一激励的线性电阻电路，互易激励(电流源)与响应(电压)的位置，其响应与激励的比值仍然保持不变。

3) 互易定理三

对于不含受控源的单一激励的线性电阻电路，互易激励与响应的位置，且把原电压激励改换为电流激励，把原电压响应改换为电流响应，则互易位置前后响应与激励的比值仍然保持不变。

4.9　习　　题

4.9.1　填空题

1. 叠加定理可表述为：线性电路中任一条支路的电流(电压)，为电路中各独立电源单独存在时在该支路上产生电流(电压)的____________。其电源置零指电压源____________，电流源____________。
2. 某含源二端网络的开路电压为 10V，如在网络两端接以 10Ω 的电阻，二端网络端电压为 8V，此网络的戴维南等效电路为 $U_S =$ ____________V，$R_o =$ ____________Ω。
3. 叠加定理是对____________和____________的叠加，对____________不能进行叠加。
4. 替代定理指____。
5. 戴维南定理可以表述为：对于任意一个线性含源二端子网络，都可以用一个电压源与电阻的串联电路来等效。其电压源的电压为该网络的____________，电阻为____________。
6. 诺顿定理可以表述为：对于任意一个线性含源二端子网络，都可以用一个电流源与电阻的并联电路来等效。其电流源的电流为该网络的短路电流，电阻为该网络中所有电源____________时的等效电阻。
7. 含源线性电阻单口网络(R_o>0)向可变电阻负载 R_L 传输最大功率的条件是____________。其中最大输出功率为____________，若有源单口网络等效为诺顿电源时单口网络传输给负载的最大功率为____________。
8. 特勒根定理是基于____________推导出来的，也就是说特勒根只要是集中参数电路它就是适用的。特勒根定理有两种形式。
9. 在线性无源网络中，若只有一个独立源工作，则在激励与响应定义下(电压源激励时响应是电流，电流源激励时响应是电压)，将该网路的激励和响应的位置互换，网络对相同激励下的响应不变，称该性质为____________。
10. 互易定理仅仅适用于____________，因此该定理使用范围较窄。

4.9.2　选择题

1. 在题 4.9.2-1 图所示电路中，电流 $I =$(　　)。

   A. −0.5A　　B. 0.5A　　C. 2.5A　　D. 1.5A

2. 在题 4.9.2-2 图所示电路中，电压 $U =$(　　)。

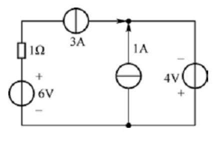
   A. 0　　B. 6V　　C. 18V　　D. 36V

题 4.9.2-1 图

题 4.9.2-2 图

3. 在题 4.9.2-3 图所示电路中，3A 理想电流源产生功率 $P_S =$(　　)。

   A. 0　　B. 12W　　C. −21W　　D. 21W



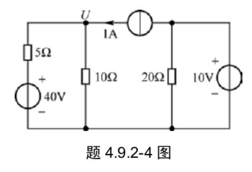
题 4.9.2-3 图

4. 在题 4.9.2-4 图所示电路中，电压 U =(　　)。

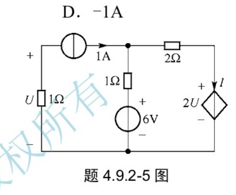
A．10V　　B．40V　　C．20V　　D．30V

5. 在题 4.9.2-5 图所示电路中，电流 I =(　　)。

A．1A　　B．3A　　C．2A　　D．−1A



题 4.9.2-4 图



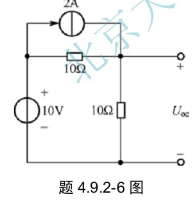
题 4.9.2-5 图

6. 题 4.9.2-6 所示电路中，a，b 端的戴维南等效电路中的开路电 U_{oc} =(　　)。

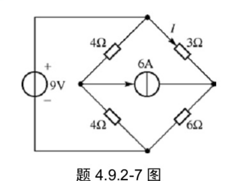
A．10V　　B．15V　　C．20V　　D．30V

7. 在题 4.9.2-7 图所示电路中，电流 I =(　　)。

A．1A　　B．−3A　　C．2A　　D．−1A



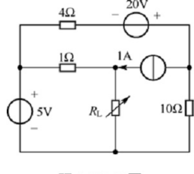
题 4.9.2-6 图



题 4.9.2-7 图

8. 在题 4.9.2-8 图所示电路中，R 上可能获得的最大功率 P_{Lmax} =(　　)。

A．10W　　B．9W　　C．8W　　D．7W



题 4.9.2-8 图

9. 特勒根定理表述正确的是(　　)。

A．特勒根定理仅仅适用于线性电路

B．特勒根定理适用于非线性电路和时变网络

C．特勒根定理实际上是功率守恒的具体体现

D．特勒根定理二可以用功率守衡来解释

10. 互易定理表述错误的是(　　)。

A．激励和响应位置互换，电路结构及元件参数均保持不变

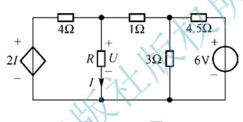
B．互易前后，一般来说，网络其余部分的电流或电压会改变

C．含有非线性元件的电路一般不具有互易性，线性时不变网络也不一定都满足互易定理

D．含有非线性元件的电路具有互易性

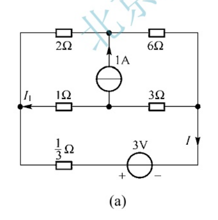
4.9.3　计算题

1. 题 4.9.3-1 图所示电路，已知 $I = 0.5$ A，求电阻 R。

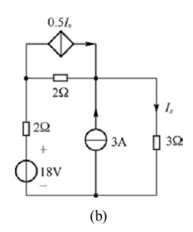


题 4.9.3-1 图

2. 用叠加定理求题 4.9.3-2 图(a)所示电路的电流 I 及 1Ω 电阻消耗的功率。求电路图(b)中的 I_x。



(a)

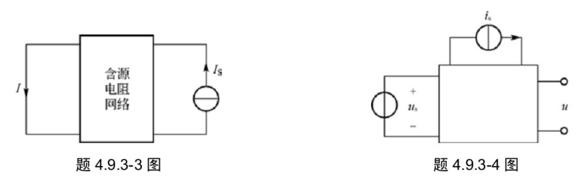


(b)

题 4.9.3-2 图

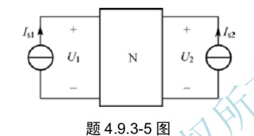
3. 题 4.9.3-3 图所示电路，当 $I_S = 2$A 时，$I = -1$A；当 $I_S = 4$A 时，$I = 0$。若要使 $I = 1$A，I_S 应为多少？

4. 题 4.9.3-4 图所示电路，N 为不含独立源的线性电阻电路。已知：当 $u_s = 12$V，$i_s = 6$A 时，$u = 0$；当 $u_s = -6$V，$i_s = -2$A 时 $u = -1$V，求当 $u_s = 8$V，$i_s = -1$A 时的电压 u。



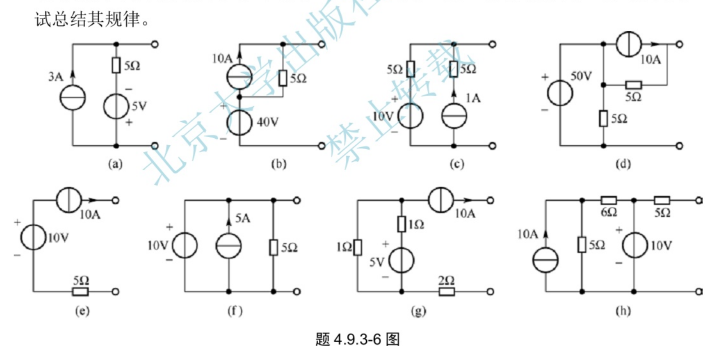
题 4.9.3-3 图　　　　题 4.9.3-4 图

5. 题 4.9.3-5 图所示电路中，N 为无独立源二端口网络。(1)当 $I_{S1}=2A$，$I_{S2}=0$ 时，I_{S1} 输出功率为 28W，且 $U_2=8V$；(2)当 $I_{S1}=0$，$I_{S2}=3A$ 时，I_{S2} 的输出功率为 54W，且 $U_1=12V$。求当 $I_{S1}=2A$，$I_{S2}=3A$ 共同作用时每个电流源的输出功率。



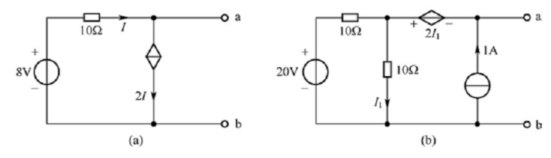
题 4.9.3-5 图

6. 求题 4.9.3-6 图所示各电路的戴维南等效电路或诺顿等效电路。通过这些实例，研究哪些电路既存在戴维南等效电路，又存在诺顿等效电路，哪些电路只能具有一种等效电路。试总结其规律。



题 4.9.3-6 图

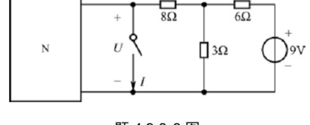
7. 求题 4.9.3-7 图所示含受控源电路的戴维南与诺顿等效电路。



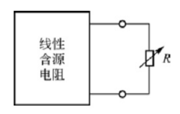
题 4.9.3-7 图

8. 题 4.9.3-8 图中 N 为含独立源电阻网络，开关断开时量得电压 $U=13\text{V}$，接通时量得电流 $I=3.9\text{A}$。求网络 N 的最简等效电路。

9. 已知题 4.9.3-9 图所示电路中 $R=10\Omega$ 时，其消耗的功率为 22.5W；R=20Ω 时，其消耗的功率为 20W。求 $R=30\Omega$ 时它所消耗的功率。



题 4.9.3-8 图

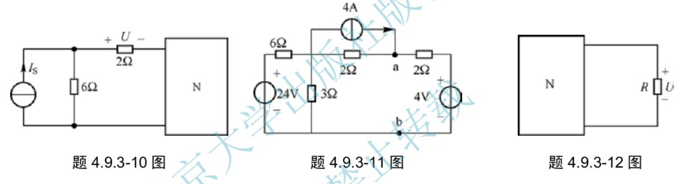


题 4.9.3-9 图

10. 题 4.9.3-10 图所示电路 N 为线性含源电阻网络，已知当 I_S=0 时，U=−2V；I_S=2A 时，U=0。求网络 N 的戴维南等效电路。

11. 利用戴维南等效电路法求题 3.9.3-11 图所示电路中电压 u_{ab}。

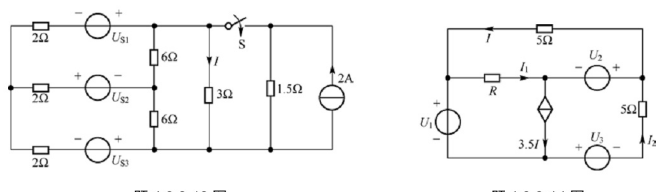
12. 题 4.9.3-12 图所示电路中 N 为线性含源电阻网络。已知当 $R=10\Omega$ 时，U=15V；R=20Ω 时，U=20V。求 R=30Ω 时，U=？



题 4.9.3-10 图　　题 4.9.3-11 图　　题 4.9.3-12 图

13. 题 4.9.3-13 图所示电路，已知当开关 S 断开时，$I=5\text{A}$。求开关接通后 $I=$ ？

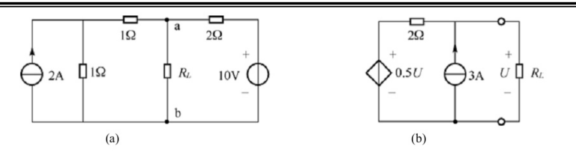
14. 题 4.9.3-14 图所示电路，已知当 R=2Ω 时，I_1=5A，I_2=4A。求当 R=4Ω 时 I_1 和 I_2 的值。



题 4.9.3-13 图　　题 4.9.3-14 图

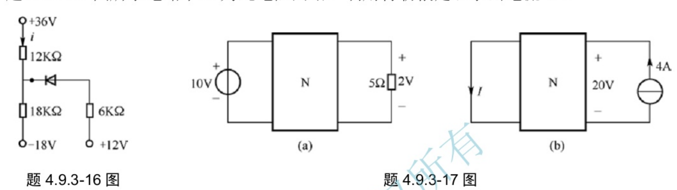
15. 题 4.9.3-15 图所示电路中，负载电阻 R_L 可以任意改变，问 R_L 等于多大时其上获得最大功率，并求最大功率 $P_{L\max}$。

16. 在分析含理想二极管电路时，可运用戴维南定理判断二极管是否导通，当二极管导通，其电阻可视为零，截止时其电阻可视为无穷大，求题 4.9.3-16 图所示电路中电流 i。



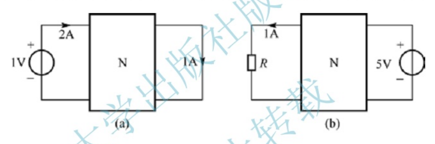
题 4.9.3-15 图

17. 题 4.9.3-17 图所示电路中 N 为纯电阻网络，利用特勒根定理求出电流 I 。



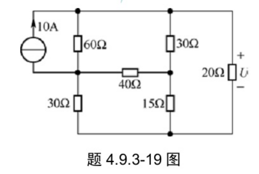
题 4.9.3-16 图　　题 4.9.3-17 图

18. 题 4.9.3-18 图中 N 为互易性网络。试根据图中已知条件计算电阻 R。



题 4.9.3-18 图

19. 用互易定理求题 4.9.3-19 图所示电路电压 U 。



题 4.9.3-19 图

第 5 章　电容元件与电感元件

教学提示：电容元件和电感元件的电压、电流关系都涉及对电压、电流的微分或积分，这种元件统称为动态元件(dynamic element)。它们分别能够储存电场和磁场能量。至少包含一个动态元件的电路称为动态电路。动态电路在任一时刻的响应与激励的全部过去历史有关，可见动态电路是有记忆的。由于动态电路的这些特性，使其可以实现电阻电路不能实现的某些特性和功能，如作为滤波器和振荡器等。本章将讨论电容元件和电感元件的定义、VCR、性质及储能情况，为动态电路的分析奠定基础。

教学要求：学习本章要了解电容元件与电感元件的定义，掌握电容元件与电感元件的VCR，牢固掌握电容元件与电感元件的性质。

5.1　电 容 元 件

在工程技术中，电容器的应用极为广泛。电容器虽然品种规格各异，但就其本质来说，电容器都是一种能储存电荷或者储存电场能量的部件。电容元件(capacitor)就是反映这种物理现象的电路模型。

5.1.1　电容元件的定义

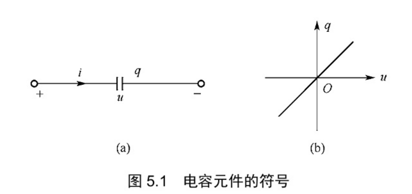


图 5.1　电容元件的符号

电容元件的定义如下：一个二端元件，如果在任一时刻 t，它的电荷 $q(t)$ 同它的端电压 $u(t)$ 之间的关系可以用 u-q 平面上的一条曲线来确定，则此二端元件称为电容元件。电容元件的符号如图 5.1(a)所示。这里设 u 和 q 为关联参考方向，即被假定为正电位的极板上其电荷也假定为正。

如果 u-q 平面上的特性曲线(称库伏特性曲线)是一条通过原点的直线，如图 5.1(b)所示，

且不随时间而变，则此电容元件称为线性时不变电容元件，即

$$q(t) = Cu(t) \tag{5.1}$$

式中，C 为正值常数，称为电容(capacitance)。在国际单位制中，C 的单位为法拉(简称为法，符号为 F)。习惯上也常把电容元件简称为电容，且如无说明，电容都是指线性时不变电容。如果库伏特性曲线不是一条通过原点的直线，而是一条曲线，那么该电容元件称为非线性电容元件。如果 C 为随时间变化的函数，那么该电容元件称为时变电容元件。



一个电容器，除了标明它的电容量外，还需标明它的额定工作电压。每一个电容器允许承受的电压是有限度的，电压过高，介质就会被击穿。从而导致电容器的损坏。因此，使用电容器时不应超过它的额定工作电压。

5.1.2　电容元件的伏安关系

设电容如图 5.1(a)所示，在电流 $i(t)$、电荷 $q(t)$和电压 $u(t)$为关联参考方向的前提下，电流等于单位时间流到极板上的电荷，即电荷随时间的变化率

$$i(t)=\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} \tag{5.2}$$

而

$$q(t)=Cu(t) \tag{5.3}$$

将式(5.3)代入式(5.2)得

$$\boxed{i(t)=\frac{\mathrm{d}Cu(t)}{\mathrm{d}t}=C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}} \tag{5.4}$$

这就是电容的 VCR，若 u 和 i 的参考方向不一致，则

$$i(t)=-C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} \tag{5.5}$$

式(5.4)表明：某一时刻电容的电流正比于该时刻电容电压的变化率。如果电压不变，即 $u(t)=C$，那么 $\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$ 为零，虽有电压，但电流为零，电容相当于开路。因此，**电容有隔断直流的作用**。电容电压变化越快，即 $\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$ 越大，则电流也就越大。

也可以把电容的电压 u 表示为电流 i 的函数。对式(5.4)积分可得

$$u(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}i(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{5.6}$$

如果只需了解在某一任意选定的初始时刻 t_0 以后电容电压的情况，可以把式(5.6)写为

$$\begin{aligned}u(t)&=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0}i(\xi)\,\mathrm{d}\xi+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t}i(\xi)\,\mathrm{d}\xi\\&=u(t_0)+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t}i(\xi)\,\mathrm{d}\xi\quad t\geqslant t_0\end{aligned} \tag{5.7}$$

由式(5.6)可知：在某一时刻 t 电容电压的数值取决于从 $-\infty$ 到 t 所有时刻的电流值，也就是说，电容电压与电流的“全部过去历史”有关。即电容电压具有记忆电流的作用。

在实际研究中，总有一个起始时刻，如果设初始时刻为 t_0，通过式(5.7)可知：没有必要去了解 t_0 以前电流的情况，t_0 以前全部历史情况对未来($t>t_0$时)产生的影响可以由 $u(t_0)$，即电容的初始电压来反映。也就是说，**如果知道了由初始时刻 t_0 开始作用的电流 $i(t)$ 以及电容的初始电压 $u(t_0)$，就能唯一地确定 $t\geqslant t_0$ 时的电容电压 $u(t)$**。

[例 5.1]　如图 5.2(a)所示电路，其中 $c=2\mathrm{F}$，电源电压 $u_s(t)$ 为

$$u_s(t)=\begin{cases}0 & (-\infty < t < 0)\\ t & (0 \leqslant t \leqslant 1\text{s})\\ -(t-2) & (1\text{s} \leqslant t \leqslant 2\text{s})\\ 0 & (2\text{s} < t)\end{cases}$$

试求电容上电流 $i(t)$ 、瞬时功率 $p(t)$ 以及在 t 时刻的储能 $w_c(t)$ 。已知 $u_c(0)=0$ 。

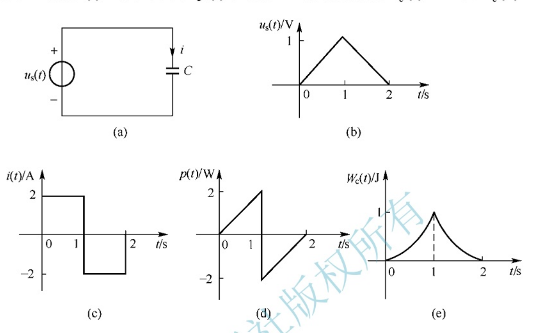


图 5.2　线性电容对三角波电压源的响应

[解] 根据式(5.4)，得电流

$$i(t)=2\frac{\mathrm{d}u_s(t)}{\mathrm{d}(t)}=\begin{cases}0 & (-\infty < t < 0)\\ 2 & (0 < t < 1\text{s})\\ -2 & (1\text{s} < t < 2\text{s})\\ 0 & (2\text{s} < t)\end{cases}$$

瞬时功率 $p(t)$ 为

$$p(t)=\begin{cases}0 & (-\infty < t < 0)\\ 2t & (0 \leqslant t \leqslant 1\text{s})\\ 2(t-2) & (1\text{s} \leqslant t \leqslant 2\text{s})\\ 0 & (2\text{s} < t)\end{cases}$$

电容的储能 $w_c(t)$ 为

$$w_c(t)=\frac{1}{2}Cu_c^2(t)=\begin{cases}0 & (-\infty < t < 0)\\ t^2 & (0 < t < 1\text{s})\\ (t-2)^2 & (1\text{s} < t < 2\text{s})\\ 0 & (2\text{s} < t)\end{cases}$$

从本例可见电容的电压波形和电流波形是不同的，这一情况和电阻元件所表现的情况是不同的。

[例 5.2] 如图 5.3(a)所示，电流 $i(t)$ 波形如图 5.3(b)所示，试求电容电压。设 $u(0)=0$。

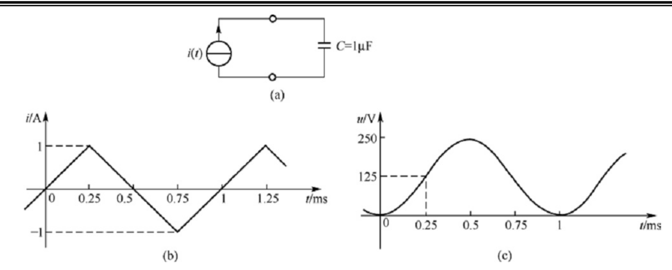


图 5.3　线性电容对三角波电流源的响应

[解] 已知电容电流求电容电压时，可用式(5.7)。为此必须写出 $i(t)$ 的函数式，对所示三角波分段写为

$$i(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{0.25\times10^{-3}}t=4000t & 0\leqslant t\leqslant 0.25\times10^{-3}\,\text{s}\\ -4000(t-0.5\times10^{-3})=-4000t+2 & 0.25\times10^{-3}\,\text{s}\leqslant t\leqslant 0.75\times10^{-3}\,\text{s}\\ 4000(t-10^{-3})=4000t-4 & 0.75\times10^{-3}\,\text{s}\leqslant t\leqslant 1.25\times10^{-3}\,\text{s}\end{cases}$$

等。利用式(5.7)，分段计算 $u(t)$。

当 $0\leqslant t\leqslant 0.25\times10^{-3}\,\text{s}$ 时

$$u(t)=u(t_0)+\frac{1}{C}\int_0^{\xi} i(\xi)\,\mathrm{d}\xi=10^6\int_0^t 4000\xi\mathrm{d}\xi=2\times10^9t^2\ \text{V}$$

电压随时间按抛物线规律上升，当 $t=0.25\text{ms}$ 时，电压为 125 V。

当 $0.25\times10^{-3}\,\text{s}\leqslant t\leqslant 0.75\times10^{-3}\,\text{s}$ 时

$$u(t)=u(0.25\times10^{-3})+\frac{1}{C}\int_{0.25\times10^{-3}}^{t} i(\xi)\,\mathrm{d}\xi=125+10^6\int_{0.25\times10^{-3}}^{t}(-4000\xi+2)\,\mathrm{d}\xi$$
$$=(-250+2\times10^6t-2\times10^9t^2)\text{V}$$

此为一开口向下的抛物线方程，其顶点在 $t=0.5\text{ms}$、$u=250\text{V}$ 处。当 $t=0.75\text{ms}$ 时，电压下降到 125V。

当 $0.75\times10^{-3}\,\text{s}\leqslant t\leqslant 1.25\times10^{-3}\,\text{s}$ 时

$$u(t)=u(0.75\times10^{-3})+\frac{1}{C}\int_{0.75\times10^{-3}}^{t} i(\xi)\,\mathrm{d}\xi=125+10^6\int_{0.75\times10^{-3}}^{t}(4000\xi-4)\mathrm{d}\xi$$
$$=(2000-4\times10^6t+2\times10^9t^2)\text{V}$$

此为一开口向上的抛物线方程，其顶点在 $t=1\text{ms}$，$u=0$ 处。

电压波形如图 5.3(c)所示。

5.1.3　电容元件的储能

若电容电压、电流为关联参考方向，则任一瞬间电容吸收的瞬时功率为

$$p(t)=u(t)i(t) \tag{5.8}$$

以例 5.1 所示电容来说，如图 5.2(d)所示，该电容元件的功率有时为正，有时为负，这和电阻的功率总为正值是大不相同的。电容功率的这个特点表明：电容有时吸收功率，有时却又放出功率。

由于

$$p = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} \tag{5.9}$$

则在 $t_1 \sim t_2$ 期间，电容 C 吸收的能量为

$$\begin{aligned} w_C(t) &= \int_{t_1}^{t_2} p(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{t_1}^{t_2} u(\xi)i(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{t_1}^{t_2} Cu(\xi)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\xi \\ &= C\int_{u(t_1)}^{u(t_2)} u\mathrm{d}u = \frac{1}{2}Cu^2\Big|_{u(t_1)}^{u(t_2)} = \frac{1}{2}C[u^2(t_2) - u^2(t_1)] \end{aligned} \tag{5.10}$$

由式(5.10)可知：在 $t_1 \sim t_2$ 期间供给电容的能量只与时刻 t_1 和 t_2 的电压值 $u(t_1)$ 和 $u(t_2)$ 有关，而与此期间其他电压值无关。电容是储能元件，$t_1 \sim t_2$ 期间供给电容的能量是用来改变电容的储能情况的，因此，式(5.10)中的 $\frac{1}{2}Cu^2(t_2)$ 项应是表示 t_2 时刻电容储能的，即

$$w_C(t_2) = \frac{1}{2}Cu^2(t_2)$$

而另一项 $\frac{1}{2}Cu^2(t_1)$ 表示 t_1 时刻电容储能的，即

$$w_C(t_1) = \frac{1}{2}Cu^2(t_1)$$

亦即**电容 C 在某一时刻 t 的储能只与该时刻 t 的电压有关**，即

$$\boxed{w_C(t) = \frac{1}{2}Cu^2(t)} \tag{5.11}$$

式(5.11)表明，电容储能与该时刻电压的平方成正比，为非负值，说明电容是一种储能元件，电容的储能是电容电压具有记忆性质的本质。

思考与练习

5.1-1　一个 1F 的电容，在某一时刻，其端电压为 10V，能否算出该时刻的电流是多少？为什么？如果已知电压为 $u = 5t^2$，且在某一时刻的瞬时值为 10V，结果又如何？

5.1-2　设有一个 1F 的电容，求在下列各种波形作用时的伏安特性曲线：(1) $u = 10\sin t\mathrm{V}$；(2) $u = 10\mathrm{e}^t\mathrm{V}$；(3) $u = 10\mathrm{V}$。

5.1-3　试判断下列各种说法是否正确：

(1) 一个线性时不变电容可以用唯一的一条伏安特性曲线来表征；

(2) 一个线性时不变电容可以用唯一的一条 $u-q$ 特性曲线来表征；

(3) 一个线性时不变电容可以用唯一的一条 $i-\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ 特性曲线来表征。

5.1-4　有人说：在电路中当电容两端有一定电压时，相应地也有一定的电流，因此，某时刻电容储能与该时刻的电压有关，也可以说成是与该时刻的电流有关。这样说对不对？

5.1-5　定值电流 4A 从 t=0 时开始对电容充电，C=2F。问在 10s 后电容的储能是多少？100s 后储能又是多少？设电容初始电压为零。(400J；40000J)

5.2　电容元件的性质

电容伏安特性的积分形式为

$$u_C(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

由上式可知，电容电压取决于电流的全部历史，因此，可以说电容电压有“记忆”电流的性质，电容是一种记忆元件。通常只知道在某一初始时刻 t_0 后作用于电容的电流情况，而对在此之前电容电流的情况并不了解。因此

$$u_C(t)=u(t_0)+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\xi)\,\mathrm{d}\xi \qquad t\geqslant t_0$$

是一个更有实际意义的，反映电容电压记忆性质的关系式。

设想若有任意时刻为 t_0，将其前一瞬间记为 t_{0-}，后一瞬间记为 t_{0+}，则可得 $t=t_{0+}$ 时刻的电容电压为

$$u(t_{0+})=u(t_{0-})+\frac{1}{C}\int_{t_{0-}}^{t_{0+}} i(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

在实际电路中，通过电容的电流总是为有限值，因此，该有限的电流在无穷小的区间 $[t_{0-},t_{0+}]$ 内的积分等于零，所以有

$$u(t_{0+})=u(t_{0-}) \tag{5.12}$$

式(5.12)表明，电容电压具有连续性质。

电容电压的连续性质可陈述如下。

若电容电流 $i(t)$ 在闭区间内 $[t_a,t_b]$ 内为有界的，则电容电压 $u_C(t)$ 在开区间 (t_a,t_b) 内为连续的。特别是，对任何时刻 t，且 $t_a<t<t_b$。

$$u_C(t_-)=u_C(t_+) \tag{5.13}$$

式(5.13)常常被总结为“**电容电压不能跃变**”，在动态电路分析问题中常常用到这一结论，但需注意应用的前提。当电容电流为无界时此性质不存在。

通过上述分析表明了电容电压具有两个重要性质，即电容电压的**连续性质和记忆性质**。

5.3　电 感 元 件

由物理学可知，当导线中有电流通过时，在它的周围就建立起磁场。工程中，广泛应用各种线圈建立磁场，储存磁能。图 5.4 为线圈示意图。当电流 i 流过线圈时，就会激发产生磁通 $\phi(t)$，但同时也在导线中消耗能量。如果忽略耗能等次要因素，就可以用电感元件(inductor)作为实际线圈的模型。

5.3.1　电感元件的定义

电感元件的定义如下：一个二端元件，如果在任一时刻 t，它的电流 $i(t)$ 同它的磁链 $\psi(t)$

之间可以用$\Psi-i$平面上的一条曲线来确定，则此二端元件称为电感元件，简称为电感。电感元件的符号如图 5.5(a)所示。

在讨论$i(t)$和$\psi(t)$的关系时，通常采用关联参考方向，即两者的参考方向应符合右手螺旋法则。

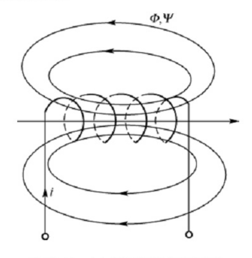


图 5.4　电感线圈及其磁通线

(a)　(b)

图 5.5　电感元件的符号

如果$\Psi-i$平面上的特性曲线是一条通过原点的直线，如图 5.5(b)所示，且不随时间而变，则此电感元件称为线性时不变电感元件，亦即

$$\psi(t)=Li(t) \tag{5.14}$$

式中，L 为正值常数，它是用来度量特性曲线斜率的，称为电感(inductance)。在国际单位制中，L 的单位为亨利(简称为亨，符号为 H)。习惯上也常把电感元件简称为电感，并且，如不加声明，电感均指线性时不变电感。

一个实际的电感线圈，除了标明它的电感量外，还应标明它的额定工作电流。电流过大，会使线圈过热或使线圈受到过大电磁力的作用而发生机械变形，甚至烧毁线圈。

5.3.2　电感元件的伏安关系

虽然电感是根据$\Psi-i$关系来定义的，在电路分析中令人感兴趣的往往是它的 VCR。当通过电感的电流发生变化时，磁链也相应地发生变化，根据电磁感应定律，电感两端出现(感应)电压；当通过电感的电流不变时，磁链也不发生变化，这时虽有电流但没有电压。这和电阻、电容元件完全不同，电阻是有电压就一定有电流；电容是电压变化才有电流；电感则是电流变化才有电压。

根据电磁感应定律，感应电压等于磁链的变化率。当电压的参考方向与磁链的参考方向符合右手螺旋法则时，可得

$$u=\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} \tag{5.15}$$

若电流与磁链的参考方向符合右手螺旋法则，则可用式(5.14)代入式(5.15)得

$$\boxed{u=\frac{\mathrm{d}Li}{\mathrm{d}t}=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}} \tag{5.16}$$

这就是电感的 VCR，其中涉及对电流的微分。由以上推导过程可知，式(5.16)必须在电流、电压参考方向一致时才能使用。若电流、电压参考方向不一致，则应在上式中加一个负号。

式(5.16)表明：在某一时刻电感的电压正比于该时刻电流的变化率。如果电流不变，那么$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$为零，虽有电流，但电压为零，电感相当于短路。因此，**电感对直流起着短路的作用，**电感电流变化越快，即$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$越大，则电压也就越大。

也可以把电感的电流 i 表示为电压 u 的函数，对式(5.16)积分，可得

$$i(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}u(\xi)\,\mathrm{d}\xi \tag{5.17}$$

在任选初始时刻 t_0 以后，式(5-17)可表为

$$\begin{aligned}i(t)&=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t_0}u(\xi)\,\mathrm{d}\xi+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}u(\xi)\mathrm{d}\xi\\&=\frac{1}{L}\psi(t_0)+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}u(\xi)\mathrm{d}\xi\\&=i(t_0)+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}u(\xi)\,\mathrm{d}\xi\qquad t\geqslant t_0\end{aligned} \tag{5.18}$$

由式(5.18)可知，在任一时刻 t 时电感电流值取决于其初始值 $i(t_0)$ 以及在 $[t_0,t]$ 区间所有的电压值。

5.3.3　电感元件的储能

电感也是一种储能元件(与电容元件储能情况的分析类似)，在 u，i 采用关联的参考方向时，电感元件的瞬时功率可表示为 $p(t)=u(t)i(t)$。

设在 t_1 到 t_2 期间对电感 L 充电，电感电压为 $u(t)$，电流为 $i(t)$，则在此期间供给电感的能量为

$$\begin{aligned}w_L(t)&=\int_{t_1}^{t_2}p(\xi)\,\mathrm{d}\xi=\int_{t_1}^{t_2}u(\xi)\,i(\xi)\,\mathrm{d}\xi=\int_{t_1}^{t_2}Li(\xi)\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\xi\\&=L\int_{i(t_1)}^{i(t_2)}i\mathrm{d}i=\frac{1}{2}Li^2\Big|_{i(t_1)}^{i(t_2)}=\frac{1}{2}L[i^2(t_2)-i^2(t_1)]\end{aligned} \tag{5.19}$$

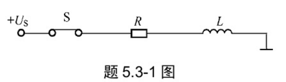
在 t_1～t_2 期间供给电感的能量只与时刻 t_1 和 t_2 的电流值 $i(t_1)$、$i(t_2)$ 有关，而与此期间其他电流值无关。亦即**电感在某一时刻 t 的储能只与该时刻 t 的电流有关，**即

$$\boxed{w_L(t)=\frac{1}{2}Li^2(t)} \tag{5.20}$$

此即电感储能公式，电感电流反映了电感的储能状态。由式(5.20)可知电感的能量总是为正值，但有时增长，有时减少。电感本身并不消耗能量，表明电感是一种储能元件。

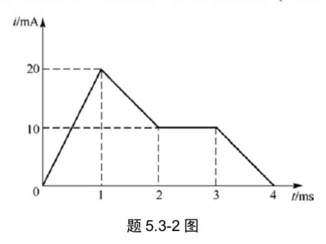
思考与练习

5.3-1　试标出题 5.3-1 图所示电路中开关 S 打开的瞬间，电感两端电压的极性。



题 5.3-1 图

5.3-2 流过 5mH 电感的电流如题 5.3-2 图所示，试求电感电压的波形(设电流与电压为关联参考方向)；并求 t=1.5ms 和 t=2.5ms 时的电感储能。(562.5nJ，250nJ)



题 5.3-2 图

5.3-3 如果一个电感线圈两端的电压为零，是否可能有储能？结合上题的计算结果来说明。

5.4 电感元件的性质

电感的 VCR 的积分形式为

$$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} u(\xi)\,\mathrm{d}\xi \qquad t \geqslant t_0$$

由上式可知，电感电流取决于电压的全部历史，因此，可以说电感电流有“记忆”电压的性质，电感是一种记忆元件。

设想若有任意时刻为 t_0，将其前一瞬间记为 t_{0-}，后一瞬间记为 t_{0+}，则可得 $t=t_{0+}$时刻的电感电流为

$$i(t_{0+}) = i(t_{0-}) + \frac{1}{L}\int_{t_{0-}}^{t_{0+}} u(\xi)\mathrm{d}\xi$$

在实际电路中，加在电感两端的电压总为有限值，因此，该有限的电压在无穷小的区间 $[t_{0-}, t_{0+}]$ 内的积分等于零，所以有

$$i(t_{0+}) = i(t_{0-}) \tag{5.21}$$

式(5.21)表明，电感电流具有连续性质。

电感电流的连续性质可陈述如下。

若电感电压 $u(t)$ 在闭区间内 $[t_a, t_b]$ 为有界的，则电感电流 $i_L(t)$ 在开区间 (t_a, t_b) 内为连续的。特别是，对任何时刻 t，且 $t_a < t < t_b$

$$\boxed{i_L(t_-) = i_L(t_+)} \tag{5.22}$$

即“**电感电流不能跃变**”，需注意当电感电压为无界时此性质不存在。

通过上述分析表明电感电流具有两个重要性质，即**电感电流的记忆性质和连续性质**。

将电容与电感的 VCR 即式(5.4)与式(5.16)加以比较，就会发现电感与电容之间存在着对偶关系，电感与电容是一对对偶量，因此上述对电感元件的所有分析过程均可通过对偶关系由电容元件的特性推得。

思考与练习

5.4-1 判断下列说法的对错。

1. 如果一个电感元件两端的电压为零，则电感无储能。 ( )
2. 电感电流时正时负，而储能则总是正值。 ( )
3. 电感元件中通过直流电流时可视作短路，此时电感 L=0。 ( )
4. 一个电感与一个电压源接通，电流是跃变的。 ( )
5. 当电感元件的磁场能量为零时，它两端的电压不一定为零。 ( )

5.5 应用——混合电池(超级电容器件)

数字蜂窝电话和卫星电话具有两个基本工作模式：接收模式和发射模式。典型的信号接收并不要求电池提供大的电流，但发送却需要较大电流，不过用于发送的时间通常只是这种设备总工作时间的一小部分，如图 5.6 所示。

电池仅能在小电流时保持恒定电压，因此，当需要较大电流时，电池电压将下降，这样会产生一些问题。因为大多数电路具有一个最低的工作电压称为截止电压，低于截止电压时，电路将不能正常工作。

如果电路吸收电流的最大值使得电池电压降到截止电压以下，那么就需要更换容量更大的电池，但对于便携式设备来说，这样做通常不能满足实际需要，因为它们通常要求使用小而轻的电池。另一种办法是使用一种混合器件，这种器件由一个标准电池和一个经过特别设计的电容(电化学电容或超级电容)组成，如图 5.7 所示。

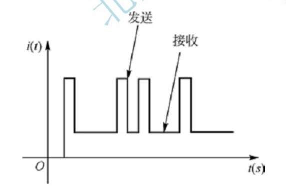


图 5.6 数字蜂窝电话和卫星电话工作模式图

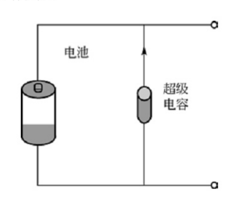


图 5.7 混合电池电路图

混合电池的工作原理：接收模式下，电池向电路输出电流，同时也向电容充电，如果电路需要电池提供较大电流(例如电话处于发送模式)，将会造成电池电压的下降，然而由于电容两端电压的变化率增加，由 $i=C\dfrac{du}{dt}$ 可知，将使得电容的输出电流由零开始上升，如果外电路的等效电阻远小于电源内阻，则该电流将流向电话电路，而不是流过电池，从而有效地辅助了电池，防止了电路的截止。

5.6 小　　结

1. 电容元件的 VCR 的微分形式：

$$i(t)=C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$$

电容元件的 VCR 的积分形式

$$u(t)=u(t_0)+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t}i(\xi)\,\mathrm{d}\xi \qquad t\geqslant t_0$$

2. 当电容电流为有限值时，电容电压具有连续的性质，即“电容电压不能跃变”，即

$$u_C(t_-)=u_C(t_+)$$

3. 电容电压还具有记忆性质，即电容电压取决于电流的“全部历史”。
4. 电容是一种储能元件，电容 C 在某一时刻 t 的储能只与该时刻的电压有关，即

$$w_C(t)=\frac{1}{2}Cu^2(t)$$

5. 电感元件的 VCR 的微分形式：

$$u=L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$$

电感元件的 VCR 的积分形式：

$$i(t)=i(t_0)+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}u(\xi)\,\mathrm{d}\xi \qquad t\geqslant t_0$$

6. 当电感电压为有限值时，电感电流具有连续性质，即“电感电流不能跃变”，即

$$i_L(t_-)=i_L(t_+)$$

7. 电感电流具有记忆性质，即电感电流取决于电压的“全部历史”。
8. 电感也是一种储能元件，电感在某一时刻 t 的储能只与该时刻的电流有关，即

$$w_L(t)=\frac{1}{2}Li^2(t)$$

5.7 习　　题

5.7.1 填空题

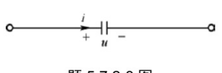
1. 电感是一种记忆元件，因为 i= ____________。
2. 电感是一种储能元件，因为储存的能量 W= ____________。
3. 电容是一种记忆元件，因为 u= ____________。
4. 电容是一种储能元件，因为储存的能量 W= ____________。
5. 线性电感的韦安特性是一条 ____________ 的直线。
6. 线性电容的库伏特性是一条 ____________ 的直线。

5.7.2　选择题

1. 题 5.7.2-1 图所示电路中，u，i 关系为(　　)。

   A. $u = L\dfrac{di}{dt}$　　B. $u = -L\dfrac{di}{dt}$

   C. $u = Li$　　D. $u = -Li$



题 5.7.2-1 图

题 5.7.2-3 图

2. 题 5.7.2-1 图所示电路中，u，i 关系为(　　)。

   A. $i(t)=\dfrac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}u(\xi)\,d\xi$　　B. $i(t)=-\dfrac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}u(\xi)\,d\xi$

   C. $i(t)=\dfrac{1}{L}\int_{0}^{t}u(\xi)\,d\xi$　　D. $i(t)=-\dfrac{1}{L}\int_{0}^{t}u(\xi)\,d\xi$

3. 题 5.7.2-3 图所示电路中，u，i 关系为(　　)。

   A. $u = Ci$　　B. $i = Cu$　　C. $u(t)=\dfrac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}i(\xi)\,d\xi$　　D. $i(t)=\dfrac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}u(\xi)\,d\xi$

5.7.3　计算题

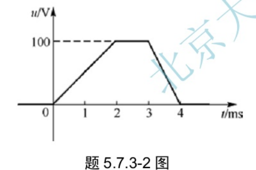
1. (1) lpF 电容的端电压为$100\cos(1000t)$ V，试求$i(t)$。u 与 i 波形是否相同？最大值、最小值是否发生在同一时刻？

   (2) 10μF 的电容电流为$10e^{-100t}$ mA，若$u(0)=-10$V，试求$u(t)$，$t > 0$。

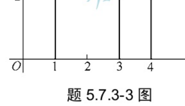
2. 考虑漏电现象，电容器可以用一个电容 C 与漏电阻 R 并联的电路作为模型。若某电容器的模型中 C=0.1μF，$R=150\text{k}\Omega$，外施电压如图 5.7.3-2 所示，试绘出电容器电流的波形。

3. 0.2F 电容的电流如题 5.7.3-3 图所示，若$u(0)=0$ V，试绘出电容电压的波形。

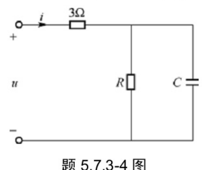
4. 题 5.7.3-4 图所示，已知$u=5+2e^{-2t}$(V)，$t\geqslant 0$，$i=1+2e^{-2t}$(A)，$t\geqslant 0$，求电阻 R 和电容 C。



题 5.7.3-2 图



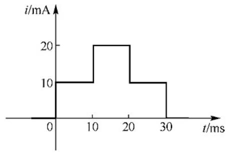
题 5.7.3-3 图



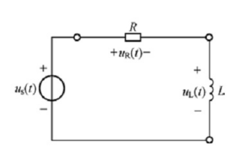
题 5.7.3-4 图

5. 作用于 25μF 电容的电流如题 5.7.3-5 图所示。若$u(0)=0$ V，试确定：(1)t=17ms 及(2)t=40ms 时的电压，吸收的功率、储能各为多少？

6. 题 5.7.3-6 图所示电路中$L=0.5$H，$R=5\Omega$，已知电阻端电压$u_R=5(1-e^{-10t})$V，$t\geqslant 0$，求(1) 求$u_L(t)$，并绘波形图；(2) 求电源电压$u_S(t)$。



题 5.7.3-5 图



题 5.7.3-6 图

7. 在关联参考方向下某电感的电流及电压波形如题 5.7.3-7 图所示。

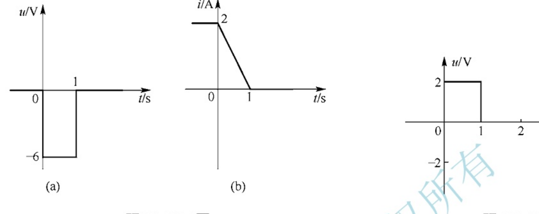
(1) 试求电感 L；　　(2) 试求在 $0<t<1\text{s}$ 期间的 $w_L(t)$；

(3) 如果所示波形图时间轴的单位由秒改变为毫秒，重复(1)、(2)所求内容。

8. 2mH 电感的电压如题 5.7.3-8 图所示，已知 $i(0)=0$，求：

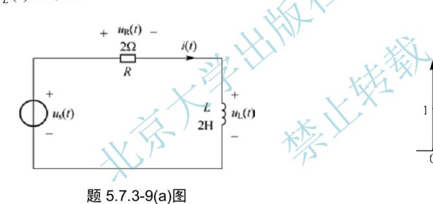
(1) 试绘出电感电流波形(设电流、电压为关联参考方向)；

(2) 储能的最大值是多少？



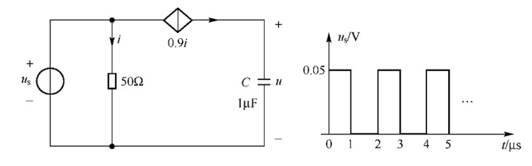
题 5.7.3-7 图　　题 5.7.3-8 图

9. 在图 5.7.3-9(a)图所示 RL 电路中，若已知电流 $i(t)$ 如题 5.7.3-9(b)图所示，试画出 $u_R(t)$ 和 $u_L(t)$ 的波形。



题 5.7.3-9(a)图　　题 5.7.3-9(b)图

10. 题 5.7.3-10 图是计数器(计算脉冲数目)的原理电路，若信号源是宽度为 1μs、幅度为 0.05V 的矩形脉冲串。问当电容上电压 u 达到 9V 时，作用过的脉冲数 N 是多少？(设 $u_C(0)=0\text{V}$)



题 5.7.3-10 图

第 6 章　正弦交流电路分析和相量模型

教学提示：在前面讲述了直流电路的分析，本章将讲述交流电路的分析，交流电路是指电路中激励是交流电，即它的大小和方向随时间做周期性变化，而正弦交流电在工农业生产和生活中应用最广泛。当激励是正弦电压(电流)时，响应是由暂态和稳态分量组成，随着时间的增长，暂态分量为零，电路就进入正弦稳定状态，简称正弦稳态。

在正弦稳态电路中，响应是与激励同频率的正弦电压(或电流)，它们可以利用相量来表示，建立相量模型画出相量图是简化分析正弦稳态电路的关键，建立电路定律的相量形式，利用学过的直流电阻电路的分析方法(网孔法、节点法，叠加定理、戴维南定理等)，将其推广应用于正弦稳态电路，才能方便地求解正弦稳态响应。

教学要求：本章让学生了解正弦量及相量的定义，掌握相量模型、阻抗和导纳、相量图等概念。熟悉电路基本定理 KCL、KVL 及元件 VCR 的相量形式；应熟练运用相量形式的网孔法、节点法，叠加定理、电源变换及戴维南—诺顿定理，以及利用相量图分析正弦稳态电路的电压和电流。

6.1　正弦交流电的基本概念

随时间按正弦规律变化的电流(电压)通称为正弦量。正弦量的实际变化规律由振幅、角频率和初相确定，故称这三个量为正弦量的三要素。相位差可以比较两个交流信号的相位关系。在实际应用中，通常所说的交流电的电压或电流的数值均指的是有效值，有效值是反映周期信号平均效果的物理量。

6.1.1　正弦交流电的三要素

大小和方向随时间按正弦规律作周期性变化的电流(电压)称为正弦交流电，统称为正弦量，在电路分析中可以使用 sin 函数或 cos 函数来描述正弦量，分析时注意统一函数，不能混用。本书分析正弦稳态电路时，一律采用 sin 函数代表正弦量。图 6.1(a)的波形为正弦电压波。

电力系统中的交流电是由交流发电机产生的，在实验室中也可由正弦信号发生器提供。以正弦电压为例，其数学表达式为

$$u(t)=U_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\varphi_{u}) \tag{6.1}$$

式(6.1)也称为正弦量的瞬时值表达式，式中有三个常量：U_{m} 称为最大值，ω 称为角频率，φ_{u} 称为初相位。

图 6.1(a)为正弦变化的电压波形，因为交流电压的大小、方向均随时间变化，所以在电路中，首先也必须规定一个参考方向，如图 6.1(b)所示，在某一瞬间 t，若电压、电流的实际方向与参考方向一致，则为正值；反之，为负值。

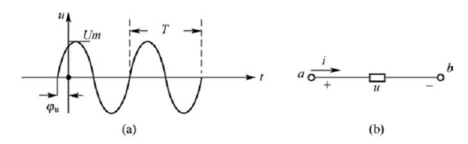


图 6.1　交流电压波形

下面将分析式(6.1)。

1. 振幅(最大值)

式(6.1)的正弦量瞬时值中的最大值为U_m，称为振幅(amplitude)。一般用大写字母带下标“m”表示，如U_m、I_m等，反映正弦量变化幅度的大小。

2. 角频率ω

式(6.1)中ω称为角频率(angular frequency)表示正弦量在单位时间内变化的弧度数，即

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \qquad \text{单位为 rad/s 或 1/s}$$

式中，T表示正弦量变化一周所需的时间，称为周期(period)，单位为秒(s)。f表示正弦量每秒钟变化的周数，称为频率(frequency)，单位为赫兹(Hz)。周期和频率互为倒数，即

$$f = \frac{1}{T}$$

我国电力网所供给的交流电的标准频率(简称工频)是f=50Hz，它的周期是$T = 1/f$ =0.02s。美国电力网频率为 60Hz，日本电力网频率同时存在 50Hz 和 60Hz。

3. 初相

式(6.1)中，正弦量解析式中的$\omega t + \varphi_u$称为相位角；t=0 时，相位为φ_u，称其为正弦量的初相位(角)，简称初相(initial phase)。

通常规定初相角的取值在$-\pi \sim \pi$范围内。它反映正弦波初始值的大小。即

$$u(0) = U_{\mathrm{m}} \sin \varphi_u$$

任一正弦波可以由它的振幅(最大值)、角频率(频率或周期)和初相决定，也就是知道了这三项就能确定该信号的数学表达式或波形图，U_{m}，ω，φ_u与正弦量具有一一对应的关系。**所以将振幅(最大值)、角频率(频率或周期)和初相这三个参数称为正弦量的三要素。**

6.1.2　正弦交流电的相位差

相位差(phase difference)指两个同频率正弦量的相位之差。

两个同频率的正弦量如果为

$$u(t) = U_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \varphi_u) \qquad i(t) = I_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \varphi_i)$$

则相位差为

$$\varphi = (\omega t + \varphi_u) - (\omega t + \varphi_i) = \varphi_u - \varphi_i \tag{6.2}$$

式(6.2)表明：对于同频率的正弦量而言，相位差=初相之差，且为定值。相位差和初相均在 $-\pi \sim \pi$ 范围内取值。

同频率正弦量的几种相位关系：

(1) 超前关系：$\varphi=\varphi_u-\varphi_i>0$ 且 $|\varphi|\leqslant\pi$ 弧度，第一量超前第二量，即 u 比 i 先到达正最大值；

(2) 滞后关系：$\varphi=\varphi_u-\varphi_i<0$ 且 $|\varphi|\leqslant\pi$ 弧度，第一量滞后第二量，即 i 比 u 先到达正最大值；

(3) 同相关系：$\varphi=\varphi_u-\varphi_i=0$，称电压与电流这两个正弦量同相；

(4) 反相关系：$\varphi=\varphi_u-\varphi_i=\pi$，称电压与电流这两个正弦量反相。

[例 6.1] 判断图 6.2 正弦量的相位关系。

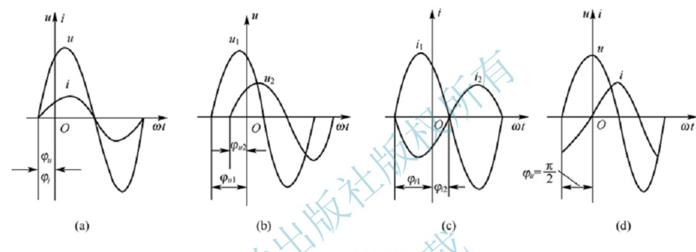


图 6.2　例 6.1 的电路图

[解] 图(a)因为相位差为 0，u 和 i 同相；

图(b)因为 $\varphi=\varphi_{u1}-\varphi_{u2}>0$，$u_1$ 超前 $u_2\varphi$ 角；

图(c)因为 $\varphi=\varphi_{i1}-\varphi_{i2}=\pi$，$i_1$ 和 i_2 反相；

图(d)因为 $\varphi_i=0$，$\varphi_u=\dfrac{\pi}{2}$，相位差为 $\varphi=\varphi_u-\varphi_i=\dfrac{\pi}{2}$，称为 u 和 i 正交。

[例 6.2] 设有两频率相同的正弦电流 $i_1(t)=5\cos(\omega t+60^\circ)\text{A}$，$i_2(t)=10\sin(\omega t+40^\circ)\text{A}$，问哪个电流滞后，滞后的角度是多少？

[解] 首先把 $i_1(t)$ 改写成用正弦函数表示，即

$$i_1(t)=5\cos(\omega t+60^\circ)=5\sin(\omega t+60^\circ+90^\circ) \qquad \varphi_1=150^\circ，\ \varphi_2=40^\circ$$

则相位差为

$$\varphi=\varphi_1-\varphi_2=150^\circ-40^\circ=110^\circ$$

说明电流 $i_2(t)$ 滞后电流 $i_1(t)$，滞后角度为 110°。

可见，只有同频率、同函数的正弦交流电才能进行相位差比较。

6.1.3　正弦交流电的有效值

由于交流电的大小、方向随时间变化，瞬时值表达式描述的只是某一瞬间的数值，实际测量瞬时值的大小不方便，在电路中需要研究它们的平均效果。因此，引入有效值的概念。

正弦交流电的有效值(effective value)定义为：让正弦交流电流 i 和一直流电流 I 分别通过同一电阻 R，如果在同一个周期 T 内所产生的热量相等，那么这个直流电流 I 的数值就称作交流电流 i 的有效值。

由此定义得出

$$I^2RT=\int_0^T i^2R\mathrm{d}t$$

交流电流的有效值为

$$I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\mathrm{d}t} \tag{6.3}$$

同理，交流电压的有效值为

$$U=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2\mathrm{d}t}$$

正弦交流电流为 $i(t)=I_\mathrm{m}\sin(\omega t+\varphi_i)$，将其代入式(6.3)中，有效值为

$$I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_\mathrm{m}^2\sin^2(\omega t+\varphi_i)\mathrm{d}t}$$

因为

$$\int_0^T \sin^2(\omega t+\varphi_i)\mathrm{d}t=\int_0^T\frac{1-\cos2(\omega t+\varphi_i)}{2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}T$$

由此得出有效值和最大值关系：

$$I=\sqrt{\frac{1}{T}I_\mathrm{m}^2\cdot\frac{T}{2}}=\frac{I_\mathrm{m}}{\sqrt{2}}=0.707I_\mathrm{m}\quad 或\quad I_\mathrm{m}=\sqrt{2}I$$

$$\boxed{\begin{aligned}I=\frac{I_\mathrm{m}}{\sqrt{2}}=0.707I_\mathrm{m}\\ U=\frac{U_\mathrm{m}}{\sqrt{2}}=0.707U_\mathrm{m}\end{aligned}} \tag{6.4}$$

可见，正弦量的最大值与有效值之间存在着 $\sqrt{2}$ 的关系。大部分使用的交流测量电表测读的都是有效值，例如，在我国日常生活中用的电压 220V，是指有效值，其振幅(最大值)为 $220\sqrt{2}\mathrm{V}=311\mathrm{V}$。

工程上说的正弦电压、电流一般指有效值，如设备铭牌额定值、电网的电压等级等。但绝缘水平、耐压值指的是最大值。因此，在考虑电气设备的耐压水平时应按最大值考虑。

思考与练习

6.1-1　若已知某正弦电压的振幅为 12V，频率为 50Hz，初相为 20°，试

(1) 写出它的瞬时值表达式，并画出它的波形图；

(2) 求当 $t=0.0025\mathrm{s}$ 时的相位和瞬时值。

6.1-2　有一元件，其耐压值为 250V，若将它接到有效值为 220V 的正弦交流电压上，会有什么后果，为什么？

6.2　正弦交流电的相量表示法

在对激励为正弦交流电的电路进行稳态分析时，经常遇到正弦信号的代数运算和微分、积分运算。利用三角函数关系进行计算，是以时间为自变量来分析激励和响应的关系，称为时域分析法，显得比较繁杂。一般可以借用复数来表示正弦信号，使正弦稳态电路的分析和计算得到简化。

由于在线性电路中，当施加的激励都是同频率的正弦电量时，电路的各支路电压、电流为相同频率的正弦量。角频率、有效值(或最大值)、初相位是正弦交流电的三要素，能唯一地确定一个正弦量，而电源的角频率往往是已知的。因此求解正弦稳态电路的各支路电压、电流时，主要是求各支路电压、电流的有效值和初相位。由数学知，一个复数具有模和幅角，恰好与正弦量的有效值、初相角两要素相对应。引入复数来表示正弦量，称为相量法。

*6.2.1　复数及复数运算

1. 复数及其表示形式

一个复数是由实部和虚部组成的。复数有多种表达形式，常见的有代数形式、指数形式、三角函数形式和极坐标形式，还可以用图来表示。设 A 为复数，a、b 分别为实部和虚部，则有下面的表示形式：

(1) 代数形式　$A = a + \mathrm{j}b$　　(2) 指数形式　$A = r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$

(3) 三角函数形式　$A = r(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi)$　　(4) 极坐标形式　$A = r\angle\varphi$

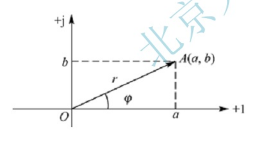


图 6.3　复数 A 的矢量图

上面四种复数表示形式的相互关系是 $r = \sqrt{a^2 + b^2}$，称为复数 A 的模，$\varphi = \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right)$ 称为幅角，三角函数形式与代数形式的关系有：$a = r\cos\varphi$，$b = r\sin\varphi$。复数可以表示在复平面上，如图 6.3 所示。

(5) 复平面的矢量图形式：复数也可以用复平面上的有向线段来表示。在原点与 A 之间连一直线，直线长度记作 r 为复数的模，在线段 A 端加上箭头，这个有向线段与实轴的夹角为 φ，也是复数 A 的幅角。复数与 $A(a,b)$ 相对应，这种表示复数的形式称为复数矢量。

2. 复数运算

设有两个复数：

$$A_1 = a_1 + \mathrm{j}b_1 = r_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1} = r_1\angle\varphi_1$$

$$A_2 = a_2 + \mathrm{j}b_2 = r_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2} = r_2\angle\varphi_2$$

1) 复数的加、减法

复数的加减运算应用代数形式较为方便，就是把它们的实部和虚部分别相加或相减。

$$A_1 \pm A_2 = (a_1 + \mathrm{j}b_1) \pm (a_2 + \mathrm{j}b_2) = (a_1 \pm a_2) + \mathrm{j}(b_1 \pm b_2)$$

复数的加、减法也可以在复平面上表示，如图 6.4(a)所示，两个复数之和为以 $\overline{OA_1}$ 和 $\overline{OA_2}$ 为边所做的平行四边形的对角线长度 $\overline{OA}$ 。这很方便，以后经常用到这种平行四边形求和法则的。图 6.4(b)为复数的减法示意图。

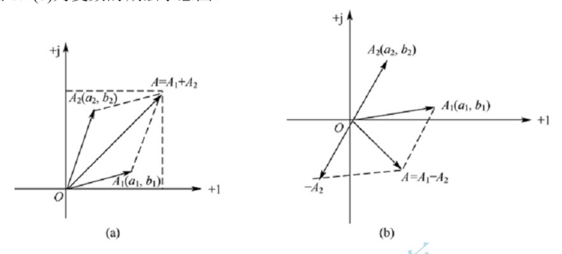


图 6.4　复数的加、减法图示

2) 复数的乘、除法

一般来讲，复数的乘、除法运算用复数的极坐标形式较为简便。

设有两个复数：

$$A_1=a_1+\mathrm{j}b_1=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1}=r_1\angle\varphi_1$$

$$A_2=a_2+\mathrm{j}b_2=r_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2}=r_2\angle\varphi_2$$

$$A=A_1A_2=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1}r_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2}=r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_1+\varphi_2)}=r_1r_2\angle(\varphi_1+\varphi_2)$$

复数相乘，其模相乘，幅角相加。

$$A=\frac{A_1}{A_2}=\frac{r_1\angle\varphi_1}{r_2\angle\varphi_2}=\frac{r_1}{r_2}\angle(\varphi_1-\varphi_2)$$

复数相除时，其模相除，幅角相减。

6.2.2　正弦量的相量表示法

假设某正弦电流为

$$i(t)=I_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\varphi_i)$$

根据欧拉公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}=\cos\theta+\mathrm{j}\sin\theta$$

可以把复指数函数 $I_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi_i)}$ 展开成

$$I_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi_i)}=I_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi_i)+\mathrm{j}I_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\varphi_i)\tag{6.5}$$

由式(6.5)可知，复指数函数的虚部正好是正弦电流

$$i(t)=\mathrm{Im}[I_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi_i)}]=I_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\varphi_i)\tag{6.6}$$

式中，Im[ ]表示取复指数函数的虚部。

$$i(t)=\mathrm{Im}[I_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi_i)}]=\mathrm{Im}[I_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_i}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=\mathrm{Im}[\sqrt{2}I\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_i}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=\mathrm{Im}[\dot{I}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]\tag{6.7}$$

式(6.7)表明，利用欧拉公式，可以将一个实数范围的正弦时间函数与一个复数范围内的复指数函数对应起来，式(6.7)中

$$\boxed{\dot{I}_{\mathrm{m}} = I_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_i} = I_{\mathrm{m}}\angle\varphi_i} \tag{6.8}$$

复数 $\dot{I}_{\mathrm{m}}$ 是一个与时间无关的复值常数，其模为正弦电流的振幅(最大值)，幅角为该正弦电压的初相。式(6.8)这一复值常数称为电流振幅相量。因为

$$\dot{I}_{\mathrm{m}} = I_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_i} = I_{\mathrm{m}}\angle\varphi_i = \sqrt{2}I\angle\varphi_i \tag{6.9}$$

式(6.9)中 I 为有效值。$\dot{I} = I\angle\varphi_i$ 也是相量，称为正弦量的有效值相量，它的模是电流(或电压)的有效值，幅角是正弦电流(或电压)的初相角。相应的 $\dot{I}_{\mathrm{m}}$ 称为最大值相量。**今后一般所指的相量为有效值相量**，即

$$\boxed{\dot{I} = I\angle\varphi_i} \tag{6.10}$$

显然，正弦电压 u 与电流 i 一样与其相量有着一一对应的关系：

$$\begin{aligned} i &\xleftrightarrow{\text{一一对应}} \dot{I}_{\mathrm{m}} = \sqrt{2}I\angle\varphi_i \xleftrightarrow{\text{一一对应}} \dot{I} = I\angle\varphi_i \\ u &\xleftrightarrow{\text{一一对应}} \dot{U}_{\mathrm{m}} = \sqrt{2}U\angle\varphi_u \xleftrightarrow{\text{一一对应}} \dot{U} = U\angle\varphi_u \end{aligned} \tag{6.11}$$

相量(phasor)是复数，为了与一般复数区别，利用它代表一个正弦量时，在相量的字母上端需加一点。

可以将相量画在复平面中，用有向线段表示，所得的图形称为相量图(phasor diagram)，如图 6.5 所示。

[例 6.3] 已知同频率的正弦电压和正弦电流分别为 $u(t) = 10\sqrt{2}\cos(314t + 150^\circ)\mathrm{V}$，$i(t) = 20\sqrt{2}\sin(314t + 30^\circ)\mathrm{A}$。试写出 u 和 i 的相量，画出相量图，并说明它们的相位关系。

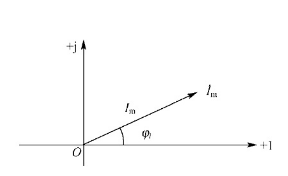
[解]

$$\begin{aligned} u(t) &= 10\sqrt{2}\cos(314t + 150^\circ) = 10\sqrt{2}\sin(314t + 90^\circ + 150^\circ) \\ &= 10\sqrt{2}\sin(314t + 240^\circ) = 10\sqrt{2}\sin(314t - 120^\circ) \end{aligned}$$

$$\dot{U}_{\mathrm{m}} = 10\sqrt{2}\angle(-120^\circ)\mathrm{V} \qquad \dot{U} = 10\angle(-120^\circ)\mathrm{V}$$

$$\dot{I}_{\mathrm{m}} = 20\sqrt{2}\angle 30^\circ\mathrm{A} \qquad \dot{I} = 20\angle 30^\circ\mathrm{A}$$

注意：本书是以正弦函数 sin 为标准的，因此，以 cos 函数表示的正弦电压应化为以 sin 函数表示，然后再写相量。相量图如图 6.6 所示，同频率的相量可画在同一相量图中。从相量可见，电流相位超前电压 150°。



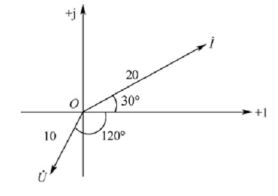
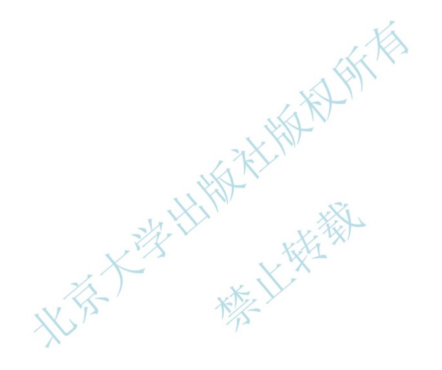


图 6.5　相量图

图 6.6　例 6.3 的相量图



6.2.3　相量的运算性质

1. 线性性质

线性性质的表示为 N 个同频率正弦量线性组合的相量等于各个正弦量相量的线性组合。 也就是：$f_1(t)$，$f_2(t)$ 是正弦量，可以表示为

$f_1(t)=\mathrm{Im}[\dot{A}_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}], f_2(t)=\mathrm{Im}[\dot{A}_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$，即 $\dot{A}_1\longleftrightarrow f(t), \dot{A}_2\longleftrightarrow f_2(t)$。

设 k_1 和 k_2 为两个实数，则正弦量 $f(t)=k_1f_1(t)+k_2f_2(t)$ 的相量就是 $k_1\dot{A}_1+k_2\dot{A}_2$。

[例 6.4] 已知 $u_1(t)=5\sqrt{2}\sin(100t-30)\mathrm{V}$，$u_2(t)=4\sqrt{2}\sin(100t+60)\mathrm{V}$，求：$2u_1(t)+3u_2(t)$。

[解] 根据相量的线性性质，运用相量求解，然后反变换。

第一步　将正弦量变换为相量，得

$$u_1(t)\longrightarrow\dot{U}_1=5\angle(-30^\circ)$$
$$u_2(t)\longrightarrow\dot{U}_2=4\angle60^\circ\mathrm{V}$$

第二步　求 $2u_1(t)+3u_2(t)$ 之和的相量为

$$\begin{aligned}2\dot{U}_1+3\dot{U}_2&=2\times5\angle(-30^\circ)+3\times4\angle60^\circ\\&=2(4.33-\mathrm{j}2.5)+3(2+\mathrm{j}3.46)\\&=14.66+\mathrm{j}5.38=15.62\angle20.15^\circ\mathrm{V}\end{aligned}$$

第三步　求反变换

$$2u_1(t)+3u_2(t)=15.62\sqrt{2}\sin(100t+20.15^\circ)\mathrm{V}$$

利用正弦量与相量相互变换的方法，比直接利用三角函数计算简便。

2. 微分性质

若已知正弦交流量 $f(t)\xleftrightarrow{\text{一一对应}}\dot{A}$，**则有：** $\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\xleftrightarrow{\text{一一对应}}\mathrm{j}\omega\dot{A}$

[例 6.5]　2F 电容上的电压为 $2\sqrt{2}\sin(10t+30^\circ)\mathrm{V}$，求电容上的电流相量。

[解]　$u_C=2\sqrt{2}\sin(10t+30^\circ)\longleftrightarrow\dot{U}_C=2\angle30^\circ\mathrm{V}$

又因为

$$i_C=\mathrm{C}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t},\quad \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\longleftrightarrow\mathrm{j}\omega\dot{U}_C=\mathrm{j}10\times2\angle30^\circ=20\angle(30^\circ+90^\circ)=20\angle120^\circ$$
$$\dot{I}_C=C\cdot\mathrm{j}\omega\dot{U}_C=2\times20\angle120^\circ=40\angle120^\circ\mathrm{A}$$

可见：电容上的电流相量超前电压相量 90°，它们的频率相同。

3. 积分性质

若已知正弦交流量 $f(t)\xleftrightarrow{\text{一一对应}}\dot{A}$，**则有：** $\int f(t)\mathrm{d}t\xleftrightarrow{\text{一一对应}}\dfrac{\dot{A}}{\mathrm{j}\omega}$

在分析正弦稳态电路时，常常遇到正弦量之间的加、减、微积分运算，通常利用正弦量变换相量的运算性质，可以简化计算，利用相量法求得解答后再反变换为正弦量。

思考与练习

6.2-1　将下列复数化为极坐标形式：

(1) $1+\mathrm{j}$；(2) $-1+\mathrm{j}$；(3) $4\mathrm{j}$；(4) 3。

6.2-1　设 $A=3+4\mathrm{j}$，$B=10\angle 60^\circ$ 试计算(1) $A+B=?$；(2) $AB=?$；(3) $A/B=?$。

(8+j12.66；$50\angle 113^\circ$，$5\angle -6.9^\circ$)

6.2-3　写出下列正弦波的相量，并画出相量图。

(1) $5\sin(\omega t+30^\circ)$；(2) $10\cos(100t+15^\circ)$；(3) $-6\cos(100t-45^\circ)$。

6.2-4　利用相量计算下列两正弦电压的和与差：

$$u_1=10\sin(\omega t+60^\circ)\qquad u_2=8\cos\omega t$$

6.3　两类约束的相量形式

在分析直流电路时，利用两类约束即 KCL、KVL 和元件的伏安关系(VCR)可以列出求解支路电压或电流所需的方程组。在正弦电路中基本的无源元件是电阻、电感和电容，如果建立起元件的伏安关系及 KCL、KVL 方程的相量形式，我们就可以把直流电阻电路的分析方法推广应用于分析正弦稳态电路中。本节重点掌握 KCL、KVL 方程的相量形式及元件的伏安关系(VCR)的相量形式。

6.3.1　基尔霍夫定律的相量形式

1. 基尔霍夫电流定律(KCL)的相量形式

在时域分析中，KCL 的瞬时值表达式为

$$\sum i=0$$

以图 6.7 为例，A 节点在任意时刻的电流代数和为零，满足 KCL 定律即

$$\sum i=i_1-i_2+i_3=0$$

在线性时不变电路中，在单一频率 ω 的正弦激励下(正弦电源可以有多个，但频率必须相同)进入稳态时，各处的电流、电压都将为同频率的正弦波，所以有

$$\mathrm{Im}[\dot{I}_{1\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]-\mathrm{Im}[\dot{I}_{2\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]+\mathrm{Im}[\dot{I}_{3\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=0$$

$$\mathrm{Im}[\sqrt{2}\dot{I}_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]-\mathrm{Im}[\sqrt{2}\dot{I}_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]+\mathrm{Im}[\sqrt{2}\dot{I}_3\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=0$$

由以上两式可得

$$\mathrm{Im}[(\dot{I}_{1\mathrm{m}}-\dot{I}_{2\mathrm{m}}+\dot{I}_{3\mathrm{m}})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=0$$

$$\mathrm{Im}[\sqrt{2}(\dot{I}_1-\dot{I}_2+\dot{I}_3)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=0$$

经过上面的推导，对于任意节点，则有

$$\dot{I}_{1\mathrm{m}}-\dot{I}_{2\mathrm{m}}+\dot{I}_{3\mathrm{m}}=0\qquad \dot{I}_1-\dot{I}_2+\dot{I}_3=0$$

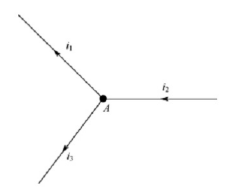


图 6.7　A 节点的电流

即

$$\boxed{\begin{aligned}\sum \dot{I}_{\mathrm{m}} &= 0\\ \sum \dot{I} &= 0\end{aligned}} \tag{6.12}$$

式(6.12)是 KCL 定律的相量形式：对于具有相同频率的正弦电路中的任一节点，在任意时刻，流出该节点的全部支路电流相量的代数和等于零。

注意：流出任一节点的全部支路电流振幅(或有效值)的代数和并不一定等于零。即一般情况下

$$\sum_{k=1}^{n} I_{k\mathrm{m}} \neq 0 \qquad \sum_{k=1}^{n} I_k \neq 0$$

2. 基尔霍夫电压定律(KVL)的相量形式

在时域分析中，KVL 的瞬时值表达式为

$$\sum u = 0$$

同理可得 KVL 的相量形式为

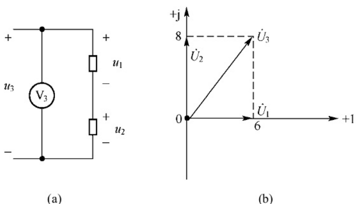
$$\boxed{\begin{aligned}\sum \dot{U}_{\mathrm{m}} &= 0\\ \sum \dot{U} &= 0\end{aligned}} \tag{6.13}$$

式(6.13)是 KVL 定律的相量形式：对于具有相同频率的正弦电流电路中的任一回路，沿该回路全部支路电压相量的代数和等于零。即任一回路所有支路电压用相量表示时仍满足 KVL。

注意：沿任一回路全部支路电压振幅(或有效值)的代数和并不一定等于零，即一般来说

$$\sum_{k=1}^{n} U_{k\mathrm{m}} \neq 0 \qquad \sum_{k=1}^{n} U_k \neq 0$$

[例 6.6] 如图 6.8 所示，已知 $u_1(t) = 6\sqrt{2}\sin 314t\mathrm{V}$，$u_2(t) = 8\sqrt{2}\sin(314t + 90^\circ)\mathrm{V}$，求：V₃表的读数。



(a)　　(b)

图 6.8　例 6.6 的电路图

[解] 方法一：

求 V3 表的读数，即求 $u_3 = u_1 + u_2$ 的有效值。采用相量和 KVL 计算，有

$$\dot{U}_1 = 6\angle 0^\circ \qquad \dot{U}_2 = 8\angle 90^\circ$$

由 KVL 得

$$\dot{U}_3 = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = 6 + 8\mathrm{j} = 10\angle \arctan\frac{4}{3}$$

所以 V3 表的读数为 10V。

方法二：相量图法

将 $\dot{U}_1$、$\dot{U}_2$ 相量用相量图表示，如图 6.8(b)所示。利用平行四边形法则，有

$$U_3 = \sqrt{U_1^2 + U_2^2} = \sqrt{6^2 + 8^2}\,\mathrm{V} = 10\mathrm{V}$$

6.3.2　电阻元件 VCR 的相量形式

1. 电阻的电压与电流的关系

在任一时刻，假设电阻 R 两端的电压与电流采用关联参考方向，如图 6.9(a)所示。电阻上的电压和电流瞬时值的关系为

$$u(t) = Ri(t)$$

设通过电阻的正弦电流为

$$i(t) = I_{\mathrm{m}}\sin(\omega t + \varphi_i)$$

则有

$$u_R(t) = U_{\mathrm{m}}\sin(\omega t + \varphi_u) = Ri(t) = RI_{\mathrm{m}}\sin(\omega t + \varphi_i) \tag{6.14}$$

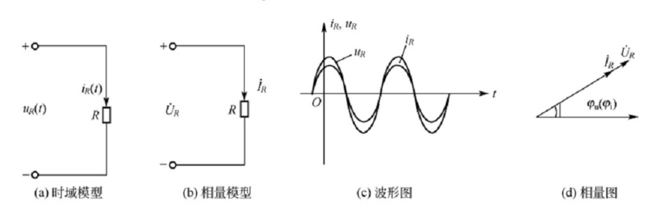
电阻上的正弦电流和电压用相量表示，则式(6.14)为

$$\mathrm{Im}[\dot{U}_{\mathrm{Rm}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] = R\,\mathrm{Im}[\dot{I}_{\mathrm{Rm}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] \qquad \mathrm{Im}[\sqrt{2}\dot{U}_{\mathrm{R}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] = R\,\mathrm{Im}[\sqrt{2}\dot{I}_{\mathrm{R}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

可以推导出电阻元件上欧姆定理的相量形式为

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{U}_{\mathrm{Rm}} &= R\dot{I}_{\mathrm{Rm}}\\ \dot{U}_{\mathrm{R}} &= R\dot{I}_{\mathrm{R}}\end{aligned}} \tag{6.15}$$

$$\begin{cases} U_{\mathrm{R}} = RI_{\mathrm{R}} \\ \angle\varphi_{\mathrm{u}} = \angle\varphi_{\mathrm{i}} \end{cases} \tag{6.16}$$



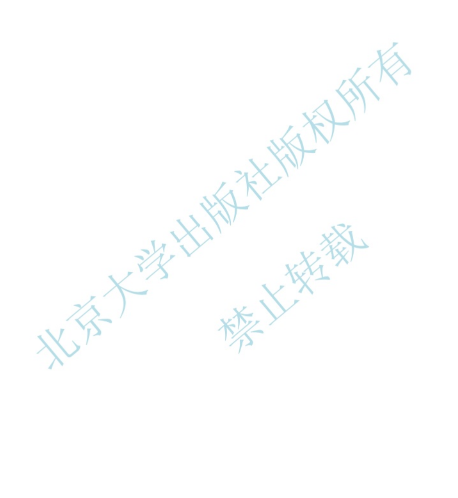
(a) 时域模型　(b) 相量模型　(c) 波形图　(d) 相量图

图 6.9　电阻元件的时域模型、相量模型

式(6.15)为电阻元件 VCR 的振幅相量形式和有效值相量形式，它们均符合欧姆定律。式(6.16)表明：

(1) 电阻端电压有效值等于电阻值与电流的有效值的乘积，即 $U_R = RI_R$。

(2) 电阻上的电压与电流同相位，即 $\angle\varphi_u = \angle\varphi_i$。



2. 电阻的相量模型、波形图及相量图

将电阻上的两端电压 $u_R \xrightarrow{\text{表示为}} \dot{U}_{\text{R}}$，$i_R \xrightarrow{\text{表示为}} \dot{I}_R$，$R$ 不变，如图 6.9(b)所示，称为电阻元件的相量模型。

电阻上的电压与电流的波形图、相量图分别如图 6.9(c)、图 6.9(d)所示，电压与电流波形是同频率，同相位。

6.3.3　电感元件的相量形式

1. 电感的电压与电流的关系

电感元件是实际工作中经常用到的元件，当电流通过线性电感元件时，若与电感电压取关联参考方向，如图 6.10(a)所示，电感元件上的电压与电流的时域关系为

$$u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} \tag{6.17}$$

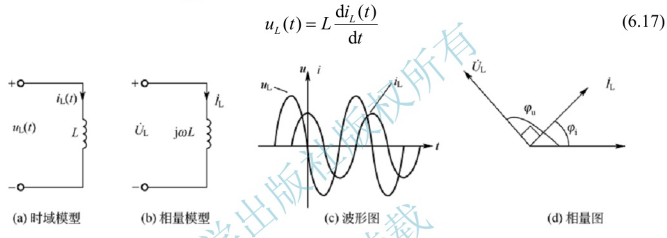


图 6.10　电感元件的时域模型、相量模型

设通过电感的电流为

$$i_L(t) = I_{L\mathrm{m}}\sin(\omega t + \varphi_i) = \sqrt{2}I_L\sin(\omega t + \varphi_i)$$

电感上的正弦电流、电压的相量表示为

$$i_L(t) = I_{L\mathrm{m}}\sin(\omega t + \varphi_i) = \mathrm{Im}[\dot{I}_{L\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] = \mathrm{Im}[\sqrt{2}\dot{I}_L\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

$$u_L(t) = U_{L\mathrm{m}}\sin(\omega t + \varphi_u) = \mathrm{Im}[\dot{U}_{L\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] = \mathrm{Im}[\sqrt{2}\dot{U}_L\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

用相量形式表示式(6.17)。

$$\mathrm{Im}[\sqrt{2}\dot{U}_L\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] = L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Im}[\sqrt{2}\dot{I}_L\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] = \mathrm{Im}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{2}L\dot{I}_L\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right] = \mathrm{Im}[\sqrt{2}\mathrm{j}\omega L\dot{I}_L\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

因此可以得到

$$\boxed{\dot{U}_L = \mathrm{j}\omega L\dot{I}_L} \tag{6.18}$$

式(6.18)是电感元件伏安关系的相量形式，可以写成

$$\dot{U}_L = U_L\angle\varphi_u = \mathrm{j}\omega L\dot{I} = \mathrm{j}\omega LI\angle\varphi_i = \omega LI\angle(\varphi_i + 90°) \tag{6.19}$$

从式(6.19)中可得

$$U_L = \omega LI_L \tag{6.20}$$

$$\varphi_u = \varphi_i + 90° \tag{6.21}$$

电感元件伏安关系的相量形式表明：

1) 数值关系

电感的端电压有效值等于电流有效值、角频率、电感量的乘积，即$U_L = \omega L I_L$。令

$$X_L = \omega L = 2\pi f L$$

则有
$$\boxed{U_L = \omega L I = X_L I_L} \tag{6.22}$$

将式(6.22)中的$X_L = \omega L$称为**感抗**(inductive reactance)，单位为欧姆(Ω)。感抗是表示限制电流的能力大小的一个物理量，它与L和ω成正比。当频率越高，感抗越大，对高频电流呈现的阻力大，在实际电路中，电感线圈常作高频扼流线圈，可以有效阻止高频电流的通过。在直流时，$\omega = 0$即$f = 0$，故$X_L = 0$，电感相当于短路。

2) 相位关系

式(6.21)表明：电感电压超前于电流的角度为90°，即$\varphi_u = \varphi_i + 90^\circ$。

2. 电感的相量模型、波形图及相量图

将电感上的两端电压$u_L \xrightarrow{\text{表示为}} \dot{U}_L$，$i \xrightarrow{\text{表示为}} \dot{I}_L$，电感$L \xrightarrow{\text{表示为}} \mathrm{j}\omega L$，得到的图6.10(b)为电感的相量模型。

电感上的电压与电流的波形图、相量图分别如图6.10(c)、图6.10(d)所示，电感电压与电流波形为同频率，电感的电压相位要比电流的相位超前90°。

[例 6.7] 正弦稳态电路中，$L = 2\mathrm{H}$电感两端的电压为300V，初相角为30°，频率为50Hz，试求通过电感的电流。

[解] 可以利用时域关系计算，但将涉及积分运算，利用电感元件伏安关系的相量形式计算将很简单。

第一步：写出已知电感电压的相量　$\dot{U}_L = 300\angle 30^\circ\ \mathrm{V}$

第二步：利用式(6.18)计算　$\dot{I}_L = \dfrac{\dot{U}}{\mathrm{j}\omega L} = \dfrac{300\angle 30^\circ}{\mathrm{j}2\times 3.14\times 50\times 2} = 0.48\angle(-60^\circ)\mathrm{A}$

第三步：写出对应的电流正弦量　$i_L(t) = 0.48\sqrt{2}\sin(314t - 60^\circ)\mathrm{A}$

6.3.4 电容元件的相量形式

1. 电容的电压与电流的关系

线性电容元件两端加交流电压，电容将周期性地充电和放电，若电容电压电流取关联参考方向，如图6.11(a)所示，电容元件上的电压与电流时域关系为

$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} \tag{6.23}$$

设外加电容的电压为$u(t) = U_{\mathrm{Cm}}\sin(\omega t + \varphi_u) = \sqrt{2}U_C\sin(\omega t + \varphi_u)$，电容上的正弦电流和电压用相量表示，式(6.23)的相量形式

$$\mathrm{Im}[\sqrt{2}\dot{I}_C \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] = C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Im}[\sqrt{2}\dot{U}_C \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] = \mathrm{Im}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{2}C\dot{U}_C \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right] = \mathrm{Im}[\sqrt{2}\mathrm{j}\omega C\dot{U}_C \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

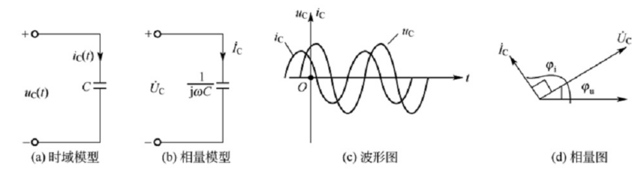


图 6.11　电容元件的时域模型、相量模型

因此可以得到

$$\boxed{\dot{I}_C = \mathrm{j}\omega C\dot{U}_C} \tag{6.24}$$

式(6.24)是电容元件伏安关系的相量形式，可以写成

$$\dot{I}_C = I_C\angle\varphi_i = \mathrm{j}\omega C\dot{U}_C = \mathrm{j}\omega CU_C\angle\varphi_u = \omega CU\angle(\varphi_u + 90^\circ) \tag{6.25}$$

从式(6.25)中可得

$$I_C = \omega CU_C \tag{6.26}$$

$$\varphi_i = \varphi_u + 90^\circ \tag{6.27}$$

电容元件伏安关系的相量形式表明：

1) 数值关系

电容上电流有效值等于电压有效值、角频率、电容量的乘积，即 $I_C = \omega CU_C$。令

$$X_C = \frac{U_C}{I_C} = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi fC}$$

则有

$$U_C = X_C I_C = \frac{1}{\omega C}I_C \tag{6.28}$$

将 $X_C = \frac{U_C}{I_C} = \frac{1}{\omega C}$ 称为容抗(capacitive reactance) (Ω)。

容抗与感抗相似，容抗随频率变化而变化，当电压、电容量一定时，电源频率 f 越高，容抗越小，由式(6.26)知，电流 $I_C = \frac{U_C}{X_C} = \frac{U_C}{2\pi f}$ 越大；反之，电源频率 f 越低，电流越小。当 $f = 0$ 时(直流电)时，$X_C = \frac{1}{\omega C} \longrightarrow \infty$，电容相当开路，电路中将没有电流通过。电容具有“通高频、阻低频”的特性。在电子线路中，电容常起到隔直、旁路、滤波作用。

2) 相位关系

由式(6.27)知电容上的电流相位超前电压相位 90°。即 $\varphi_i = \varphi_u + 90^\circ$。

2. 电容的相量模型、波形图及相量图

依据电容的电压与电流相量形式(6.24)，在频域中电容上的两端电压 $u_C \xrightarrow{\text{表示为}} \dot{U}_C$，$i_C \xrightarrow{\text{表示为}} \dot{I}_C$，电容 $C \xrightarrow{\text{表示为}} \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}$，得到的图 6.11(b)为电容的相量模型。电容上的电压与电流的波形图、相量图分别如图 6.11(c)、图 6.11(d)所示，电压与电流波形同频率，电容的电流相位超前电压 90°。

[例 6.8] 电路如图 6.12(a)所示，已知 $R=4\Omega$，$C=0.1\text{F}$，$u_S(t)=10\sqrt{2}\sin 5t\text{V}$，求：$i_1(t)$，$i_2(t)$，$i(t)$ 及其有效值相量。

[解] 相量模型如图 6.12(b)所示。

电压源相量为

$$\dot{U}_S=10\angle 0^\circ\text{V}$$

根据 RLC 元件相量形式的 VCR 方程求电流：

$$\dot{I}_1=\frac{\dot{U}_S}{R}=\frac{10\angle 0^\circ}{4}=2.5\angle 0^\circ\text{A}=2.5\text{A}$$

$$\dot{I}_2=\text{j}\omega C\dot{U}_S=\text{j}5\times 0.1\times 10\angle 0^\circ=\text{j}5=5\angle 90^\circ\text{A}$$

利用 KCL 的相量形式，得到

$$\dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2=2.5+\text{j}5=5.59\angle 63.4^\circ\text{A}$$

时域表达式：

$$i_1(t)=2.5\sqrt{2}\sin 5t\text{A}$$

$$i_2(t)=5\sqrt{2}\sin(5t+90^\circ)\text{A}$$

$$i(t)=5.59\sqrt{2}\sin(5t+63.4^\circ)\text{A}$$

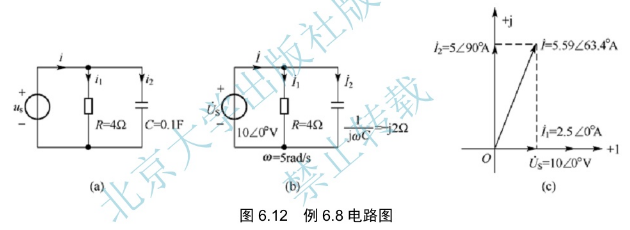


图 6.12　例 6.8 电路图

思考与练习

6.3-1　若 I_1、I_2 和 I_3 分别为汇集于某节点的三个同频率正弦电流的有效值，则这三个有效值满足 KCL，对吗？

6.3-2　电路如题 6.3-2(a)图所示，$i_S(t)=5\sin\omega t\text{A}$，测得 u_{ab}、u_{bc} 的波形如图 6.3-2(b)所示。

(1) 求 u_{ac} 及有效值 U_{ac}；

(2) 求 u_{ac} 与 i_S，u_{ab} 与 i_S 以及 u_{bc} 与 i_S 的相位关系；

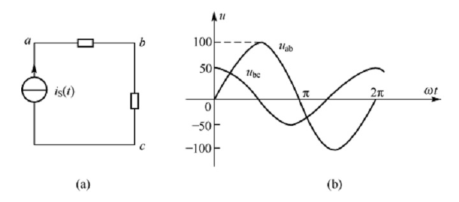
(3) 绘出相量图。

6.3-3　试判断下列表达式的正、误：

(1) $u=\text{j}\omega Li\text{V}$；　(2) $\dot{I}_m=\text{j}\omega CU_m\text{A}$；

(3) $u=c\dfrac{\text{d}i}{\text{d}t}\text{V}$；　(4) $\dot{U}_m=\text{j}\omega C\dot{I}_m\text{V}$；

(5) $\dot{U}_m=10\angle 60^\circ=10\sin(\omega t+60^\circ)\text{V}$；　(6) $i=8\sin\omega t=8\angle 0^\circ\text{A}$。



题 6.3-2 图

6.3-4　填写表 6.3-4。

表 6.3-4　元件的伏安关系

元件名称	相量关系	有效值关系	相位关系	相量图
电阻 R				
电感 L				
电容 C				

6.3-5　已知某电容 $C=0.2\text{H}$，通过电容的电压流为 $i=6\sin(t-45°)\text{A}$，试求电容电压 $u(t)$，并画出相量图。

6.4　阻抗和导纳——相量模型

通过分析电阻、电感及电容元件的伏安关系相量形式，可以得知电压相量与电流相量的比值是一个复常数(电阻是实数，电感为感抗、电容为容抗)，对于含有多个元件但不含独立电源的单口网络，可以求得端口的电压相量与电流相量的比值，从而得到阻抗的概念，相应引出导纳的定义，阻抗和导纳可以进行等效变换。

相量模型是一种运用相量分析方法方便地对正弦稳态电路进行分析、计算的假想模型，建立相量模型是分析正弦稳态电路的重要步骤。

6.4.1　阻抗

1. 阻抗的定义

N_0 为一不含独立源的单口网络，在正弦稳态下，其端口上电压、电流为同频率的正弦量电压、电流取关联参考方向，如图 6.13(a)所示。

假设电压、电流为

$$u(t)=\sqrt{2}U\sin(\omega t+\varphi_u)\xrightarrow{\text{对应相量}}\dot{U}=U\angle\varphi_u$$
$$i(t)=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\varphi_i)\xrightarrow{\text{对应相量}}\dot{I}=I\angle\varphi_i$$

定义阻抗(impedance)为端口处电压相量与电流相量的比值，即有

$$Z=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=\frac{U\angle\varphi_u}{I\angle\varphi_i}=\frac{U}{I}\angle(\varphi_u-\varphi_i)=|Z|\angle\varphi_Z \tag{6.29}$$

式中，Z——阻抗；

$|Z|$——阻抗的模为端口电压与电流有效值之比；

φ_Z——阻抗角$\varphi_Z=\angle(\varphi_u-\varphi_i)$。

阻抗 Z 是复数(也称复数阻抗)，也常称为输入阻抗、等效阻抗，其符号如图 6.13(b)所示。它也是无源网络 N_0 的等效电路。阻抗 Z 的 SI 单位是欧姆(Ω)。

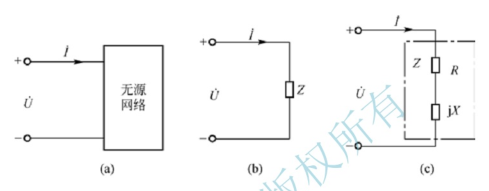


图 6.13　单口网络的阻抗及模型

因为阻抗是复数，它的表示形式可以是极坐标 $Z=|Z|\angle\varphi_Z$ 形式，还有代数形式和指数形式，可以相互转换：

$$Z=|Z|\angle\varphi_Z=R+\mathrm{j}X=|Z|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_Z} \tag{6.30}$$

式中，R 是阻抗的实部，称为电阻分量，它并不一定只由网络中的电阻元件所确定，它是网络中各元件参数和频率的函数；X 是阻抗的虚部，称为电抗分量，它并不一定只由网络中的动态元件所确定，它也是网络中各元件参数和频率的函数。

阻抗由指数形式向代数形式转换时，即已知$|Z|$，φ_Z 求 R，X 时，则

$$R=|Z|\cos\varphi_Z \qquad X=|Z|\sin\varphi_Z \tag{6.31}$$

已知阻抗的代数形式求指数形式，则有

$$|Z|=\sqrt{R^2+X^2} \qquad \varphi_Z=\arctan\frac{X}{R} \tag{6.32}$$

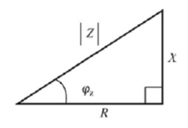


图 6.14　阻抗三角形

由式(6.32)知，$\boldsymbol{R}$、$\boldsymbol{X}$、$|\boldsymbol{Z}|$ 构成一个直角三角形，称为**阻抗三角形，**如图 6.14 所示。

按阻抗定义及 6.3 节的分析，如果无源二端网络只有一个元件，分别为 R、L 和 C，则它们相应的阻抗分别为

$$Z_R=R$$

$$Z_L=\mathrm{j}\omega L=\mathrm{j}X_L，\quad X_L=\omega L\text{称为感抗}$$

$$Z_C=\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}=-\mathrm{j}X_C，\quad X_C=\frac{1}{\omega C}\text{称为容抗}$$

2. *RLC* 串联电路

RLC 串联电路如图 6.15(a)所示，由于是串联电路，流过各个元件的电流相同，设电流为

$$i(t)=I_{\mathrm{m}}\sin\omega t=\sqrt{2}I\sin\omega t$$

为了便于分析正弦稳态电路，引入电路的**相量模型**(phasor model)。

什么是相量模型？就是保持原来电路的结构不变，电路的元件用阻抗表示，也就是 $R\longrightarrow R, L\longrightarrow \mathrm{j}\omega L, C\longrightarrow \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}$；该模型中电压、电流都使用相量，例如在图 6.15(b)中 $u\longrightarrow\dot{U}$，$i\longrightarrow\dot{I}$，$u_R\longrightarrow\dot{U}_R, u_L\longrightarrow\dot{U}_L$，$u_C\longrightarrow\dot{U}_C$，其参考方向不变。这样的模型是一种假想的模型，是分析正弦稳态电路的工具，称为相量模型。图 6.15(b)是 *RLC* 串联电路的相量模型。

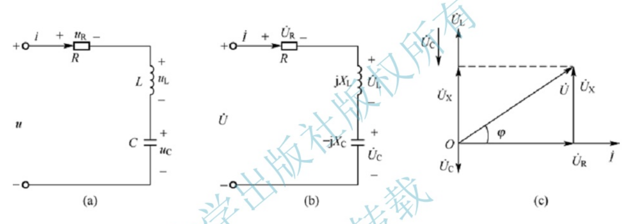


图 6.15　*RLC* 串联电路、相量模型、相量图

利用 KVL 定律的相量形式，则

$$\dot{U}=\dot{U}_R+\dot{U}_L+\dot{U}_C=R\dot{I}+\mathrm{j}\omega L\dot{I}+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I}=\left(R+\mathrm{j}\omega L+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\right)\dot{I}$$

$$=\left[R+\mathrm{j}\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)\right]\dot{I}=[R+\mathrm{j}(X_L-X_C)]\dot{I}$$

因此端口阻抗为

$$Z=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=R+\mathrm{j}\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)=R+\mathrm{j}X=|Z|\angle\varphi_Z \tag{6.33}$$

式(6.33)中 Z 的实部是 R，虚部为 X 是电抗：

$$X=\omega L-\frac{1}{\omega C}=X_L-X_C \tag{6.34}$$

$$\varphi_Z=\arctan\frac{X}{R}$$

分析式(6.34)得到 *RLC* 串联电路有以下**三种不同性质**：

(1) 当 $X>0$，$\varphi_Z>0$，即 $X_L>X_C$ 时，电路呈感性，电压超前电流。

(2) 当 $X<0$，$\varphi_Z<0$，即 $X_L<X_C$ 时，电路呈容性，电压滞后电流。

(3) 当 $X=0$，$\varphi_Z=0$，即 $X_L=X_C$，电路呈电阻性，电压与电流同相位。

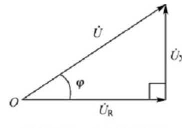


图 6.16　电压三角形

做出 RLC 串联电路呈电感性时的相量图如图 6.15(c)所示，画相量图时，常选择一个相量作为参考相量(参考相量的幅角设为零)，画在实轴上，其他相量以它为基准。串联电路中常以电流为参考相量。

可以看出 $\dot{U}$ 、$\dot{U}_R$ 及 $\dot{U}_X(=\dot{U}_L+\dot{U}_C)$ 构成一个直角三角形，$U=\sqrt{U_R^2+(U_L-U_C)^2}$，如图 6.16 所示，称**电压三角形**。

[例 6.9] 电路如图 6.15(a)所示，$R=15\Omega$，$L=0.3\text{mH}$，$C=0.2\mu\text{F}$，$u=5\sqrt{2}\sin(\omega t+60^\circ)$，$f=3\times10^4\text{Hz}$。求：$i$，$u_R$，$u_L$，$u_C$。

[解] 利用电路的相量模型图 6.15(b)

$$\dot{U}=5\angle60^\circ\text{V}$$

$$\text{j}X_L=\text{j}\omega L=\text{j}2\pi\times3\times10^4\times0.3\times10^{-3}=\text{j}56.5\Omega$$

$$\text{j}X_C=\text{j}\frac{1}{\omega C}=\text{j}\frac{1}{2\pi\times3\times10^4\times0.2\times10^{-6}}=\text{j}26.5\Omega$$

串联阻抗

$$Z=R+\text{j}\omega L-\text{j}\frac{1}{\omega C}=15+\text{j}56.5-\text{j}26.5=33.54\angle63.4^\circ\Omega$$

电路的电流为

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}}{Z}=\frac{5\angle60^\circ}{33.54\angle63.4^\circ}=0.149\angle(-3.4^\circ)\text{A}$$

$$\dot{U}_R=R\dot{I}=15\times0.149\angle-3.4^\circ=2.235\angle(-3.4^\circ)\text{V}$$

$$\dot{U}_L=\text{j}\omega L\dot{I}=56.5\angle90^\circ\times0.149\angle(-3.4^\circ)=8.42\angle86.6^\circ\text{V}$$

$$\dot{U}_C=-\text{j}\frac{1}{\omega C}\dot{I}=26.5\angle-90^\circ\times0.149\angle(-3.4^\circ)=3.95\angle(-93.4^\circ)\text{V}$$

$$i=0.149\sqrt{2}\sin(\omega t-3.4^\circ)\text{A}$$

$$u_R=2.235\sqrt{2}\sin(\omega t-3.4^\circ)\text{V}$$

$$u_L=8.42\sqrt{2}\sin(\omega t+86.6^\circ)\text{V}$$

$$u_C=3.95\sqrt{2}\sin(\omega t-93.4^\circ)\text{V}$$

U_L=8.42>U=5，分电压 U_L 大于总电压，原因是 $\dot{U}_L,\dot{U}_C$ 相位相差 180°，相量图如图 6.17 所示，$\dot{U}_L+\dot{U}_C$ 的值减少，最后得到的总电压小于电感或电容上的分电压。

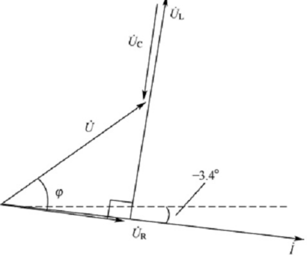


图 6.17　例 6.9 相量图

分析例 6.9 中可知：
$U\neq U_R+U_L+U_C=14.6\text{V}$，说明有效值不适用 KVL。

3. 阻抗串联的电路

引入阻抗和相量模型后，阻抗串联的计算与电阻串联的计算相似。如图 6.18(a)所示，当 n 个

阻抗串联时，其等效阻抗为各个串联阻抗之和。

$$
\begin{aligned}
Z_{eq} &= Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k = \sum_{k=1}^{n} R_k + j\sum_{k=1}^{n} X_k \\
&= R + jX = \sqrt{R^2 + X^2}\angle \arctan\frac{X}{R} = |Z|\angle\varphi_Z
\end{aligned}
\tag{6.35}
$$

式中，$R = \sum_{k=1}^{n} R_k = R_1 + R_2 + \cdots + R_n$， $X = \sum_{k=1}^{n} X_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$。

n 个串联的阻抗就可以用一个等效阻抗 Z_{eq} 来替代，如图 6.18(b)所示。各阻抗电压为

$$
\dot{U}_k = \frac{Z_k}{Z_{eq}}\dot{U} \tag{6.36}
$$

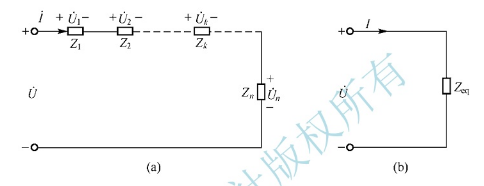


图 6.18　阻抗的串联

6.4.2　导纳

1. 导纳的定义

定义导纳(admittance)为端口电流相量与电压相量的比值， 导纳也是阻抗的倒数。常用 Y 表示，单位为西门子(S)，即

$$
\boxed{Y = \frac{\dot{I}_m}{\dot{U}_m} = \frac{\dot{I}}{\dot{U}}}
\qquad
Y = \frac{1}{Z}
\tag{6.37}
$$

导纳为复数，也称为复数导纳，输入导纳，等效导纳。它的表示形式有代数形式，还有极坐标和指数形式并可以相互转换

$$
Y = \frac{I\angle\varphi_i}{U\angle\varphi_u} = \frac{I}{U}\angle(\varphi_i - \varphi_u) = G + jB = \sqrt{G^2 + B^2}\angle\arctan\frac{B}{G} = |Y|\angle\varphi_Y = |Y|e^{j\varphi_Y} \tag{6.38}
$$

式中，G 是导纳的实部，称为电导；B 是导纳的虚部，称为电纳；$|Y|$称为导纳的模，φ_Y 称为导纳角。由式(6.38)得

$$
\left.
\begin{aligned}
|Y| &= \frac{I}{U} \\
\angle\varphi_Y &= \angle(\varphi_i - \varphi_u)
\end{aligned}
\right\}
\tag{6.39}
$$

已知导纳代数形式求指数形式，则有

$$|Y| = \sqrt{G^2 + B^2} \qquad \varphi_Y = \arctan\frac{B}{G} \tag{6.40}$$

G、B、$|Y|$关系构成一个三角形，称为**导纳三角形**，如图 6.19 所示。

图 6.19　导纳三角形

三个基本元件 R、L 和 C，它们相应的导纳分别为

$$Y_R = \frac{1}{R} = G$$

$$Y_L = \frac{1}{\mathrm{j}\omega L} = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega L} = -\mathrm{j}B_L \qquad (B_L = \frac{1}{X_L}\text{称为感纳})$$

$$Y_C = \mathrm{j}\omega C = \mathrm{j}B_C \qquad (B_C = \omega C = \frac{1}{X_C}\text{称为容纳})$$

2. *RLC* **并联电路**

RLC 并联电路如图 6.20(a)所示。*RLC* 并联电路的相量模型如图 6.20(b)所示。

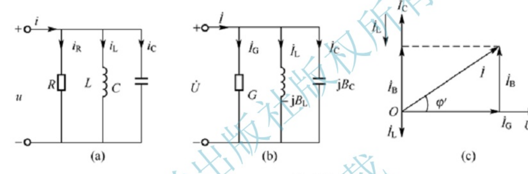


图 6.20　*RLC* 并联电路

设电压为

$$u(t) = U_m \sin\omega t = \sqrt{2}U\sin\omega t$$

则电压的相量为

$$\dot{U} = U\angle 0^\circ$$

利用 KCL 的相量形式，在图 6.20(b)中，有

$$\dot{I} = \dot{I}_G + \dot{I}_L + \dot{I}_C = \frac{\dot{U}}{R} + \frac{\dot{U}}{\mathrm{j}\omega L} + \frac{\dot{U}}{\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}}$$

$$Y = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{G\dot{U} - \mathrm{j}B_L\dot{U} + \mathrm{j}B_C\dot{U}}{\dot{U}} = \frac{1}{R} + \mathrm{j}(\omega C - \frac{1}{\omega L}) = G + \mathrm{j}B = |Y|\angle\varphi_Y$$

上式中，Y 的实部就是电导 $G = \dfrac{1}{R}$，虚部是 $B = \left(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)$，称为电纳。

Y 的模和导纳角为

$$\left.\begin{aligned} |Y| &= \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + (\omega C - \frac{1}{\omega L})^2} = \sqrt{G^2 + B^2} \\ \varphi_Y &= \arctan\frac{B}{G} = \arctan\frac{\omega C - \dfrac{1}{\omega L}}{\dfrac{1}{R}} \end{aligned}\right\} \tag{6.41}$$

分析式(6.41)，*RLC* 并联电路有以下**三种不同性质**：

(1) 当 $\omega C > 1/\omega L$ 时，$B > 0$，$\varphi_Y > 0$，电流超前电压，电路呈容性；

(2) 当 $\omega C < 1/\omega L$ 时，$B < 0$，$\varphi_Y < 0$，电流滞后电压，电路呈感性；

(3) 当 $\omega C = 1/\omega L$ 时，$B = 0$，$\varphi_Y = 0$，电流与电压同相位，电路为电阻性。

做 *RLC* 并联电路相量图时，常选择电压相量作为参考相量，画在实轴上，其他相量以它为基准。

图 6.20(c)是电路为容性的相量图，从图中可以看出 $\dot{I}$ 、$\dot{I}_G$ 及 $\dot{I}_B(=\dot{I}_L+\dot{I}_C)$ 构成一个直角三角形，如图 6.21 所示，称为**电流三角形**。

$$I=\sqrt{I_G^2+I_B^2}=\sqrt{I_G^2+(I_C-I_L)^2}$$

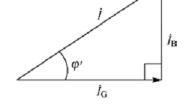


图 6.21　电流三角形

3. 阻抗并联的电路

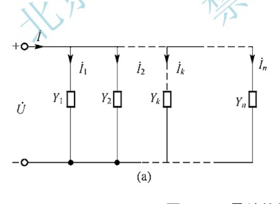
同理，对于 n 个导纳并联而成的电路，其等效导纳为

$$\begin{aligned}Y_{eq}&=Y_1+Y_2+\cdots+Y_n=\sum_{k=1}^{n}Y_k=\sum_{k=1}^{n}G_k+\mathrm{j}\sum_{k=1}^{n}B_k=G+\mathrm{j}B\\&=\sqrt{G^2+B^2}\angle\arctan\frac{B}{G}=|Y|\angle\varphi_Y\end{aligned}\tag{6.42}$$

因此 n 个并联的导纳可用一个等效导纳 Y_{eq} 来替代，如图 6.22(b)所示。各个导纳的电流为

$$\dot{I}_k=\frac{Y_k}{Y_{eq}}\dot{I}\tag{6.43}$$

式中，$\dot{I}$ 为总电流。



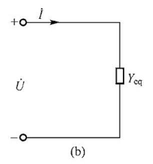


图 6.22　导纳的并联

6.4.3　阻抗与导纳的等效

任意复杂的无源二端网络，可以用 Z 或 Y 等效。图 6.23(b)是等效阻抗的最简单的电路模型，即电阻与电抗串联；同样图 6.23(c)是简单的导纳模型，即电导与电纳并联。二端网络的等效阻抗和等效导纳互为倒数。

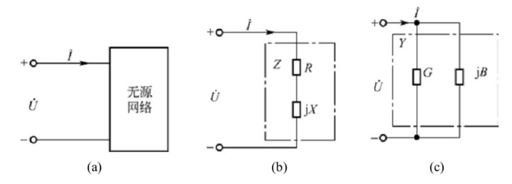


图 6.23　阻抗与导纳的等效图

1. 已知阻抗 Z，求导纳 Y

当端口电压与电流取关联参考方向时，输入阻抗为 $Z=\dfrac{\dot{U}}{\dot{I}}$，输入导纳为 $Y=\dfrac{\dot{I}}{\dot{U}}$，阻抗与导纳互为倒数，即

$$Y=\frac{1}{Z}\quad 或 \quad Z=\frac{1}{Y} \tag{6.44}$$

若已知阻抗 $Z=R+\mathrm{j}X=|Z|\angle\varphi_Z$，利用式(6.44)求出 Y。

$$Y=\frac{1}{Z}=\frac{1}{R+\mathrm{j}X}=\frac{R-\mathrm{j}X}{R^2+X^2}=\frac{R}{R^2+X^2}-\mathrm{j}\frac{X}{R^2+X^2}=G+\mathrm{j}B$$

上式中

$$G=\frac{R}{R^2+X^2}\qquad B=-\frac{X}{R^2+X^2} \tag{6.45}$$

或 $Y=\dfrac{1}{|Z|\angle\varphi_Z}=|Y|\angle\varphi_Y$，可得到 $|Y|=\dfrac{1}{|Z|}$，$\varphi_Y=-\varphi_Z$。

注意：一般情况 $G\neq\dfrac{1}{R}$ 并非是 R 的倒数，$B\neq\dfrac{1}{X}$，应根据 $Y=\dfrac{1}{Z}$ 来推导。

2. 已知导纳 Y，求阻抗 Z

$$Z=\frac{1}{Y}=\frac{1}{G+\mathrm{j}B}=\frac{G-\mathrm{j}B}{G^2+B^2}=\frac{G}{G^2+B^2}-\mathrm{j}\frac{B}{G^2+B^2}=R+\mathrm{j}X$$

故

$$R=\frac{G}{G^2+B^2}\qquad X=-\frac{B}{G^2+B^2} \tag{6.46}$$

以上各式中的 R、G、X、B 等均为ω的函数，只有在某一指定频率时才能确定 R、G 的数值和 X、B 的数值及其正负号。等效相量模型只能用来计算在该频率下的正弦稳态响应。

[例 6.10] 如图 6.24(a)所示电路，分别求 $\omega=1\mathrm{rad/s}$ 和 $\omega=4\mathrm{rad/s}$ 时的等效电路。

[解] 做出如图 6.24(a)所示电路的相量模型如图 6.24(b)所示。

(1) 当 $\omega=1\mathrm{rad/s}$ 时：

$$Z=\frac{(8+\mathrm{j}2)(1-40\mathrm{j})}{8+\mathrm{j}2+1-40\mathrm{j}}=\frac{12876+482\mathrm{j}}{81+1444}=(8.44+0.32\mathrm{j})\Omega$$

得到串联形式的等效相量模型如图 6.24(c)所示，电阻与电感串联。

另一种等效相量模型可求得

$$Y(\mathrm{j}1)=\frac{1}{Z(\mathrm{j}1)}=\frac{1}{8.44+0.32\mathrm{j}}=\frac{8.44-0.32\mathrm{j}}{8.44^2+0.32^2}=(0.12-0.0044\mathrm{j})\mathrm{S}$$

得到并联形式的电路如图 6.24(d)所示，由于 $B<0$，电纳为电感性。有

$$B_L=\frac{1}{\omega L}=0.0044\mathrm{S}\qquad L=\frac{1}{1\times 0.0044}\mathrm{H}=227.27\mathrm{H}$$

电阻为

$$R=\frac{1}{0.12}\Omega=8.33\Omega$$

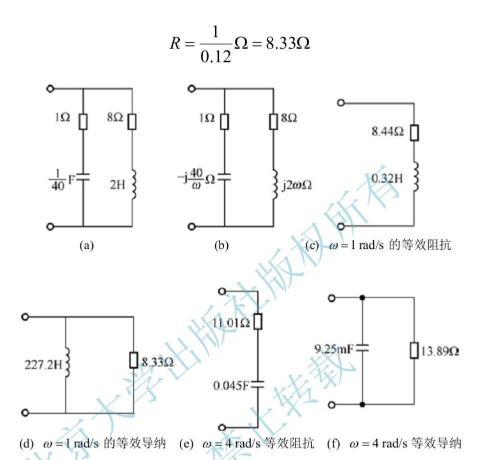


图 6.24　例 6.10 电路图

(2) 当 $\omega=4\mathrm{rad/s}$ 时：

$$Z(\mathrm{j}4)=\frac{(8+\mathrm{j}8)(1-10\mathrm{j})}{8+\mathrm{j}8+1-10\mathrm{j}}=\frac{936-472\mathrm{j}}{81+4}=(11.01-5.55\mathrm{j})\Omega$$

得到串联形式的等效相量模型如图 6.24(e)所示，因电抗分量为负值，说明为电阻与电容串联。电容为

$$X_C=\frac{1}{\omega C}=5.55\qquad C=\frac{1}{4\times 5.55}\mathrm{F}=0.045\mathrm{F}$$

另一种等效相量模型可求得

$$Y(\mathrm{j}4)=\frac{1}{Z(\mathrm{j}4)}=\frac{1}{11.01-5.55\mathrm{j}}=\frac{11.01+5.55\mathrm{j}}{11.01^2+5.55^2}=(0.072+0.037\mathrm{j})\mathrm{S}$$

得到并联形式的电路如图 6.24(f)所示，由于 $B>0$，电纳为电容性。有

$$B_C=\omega C=0.037\mathrm{S}\qquad C=\frac{0.037}{4}=9.25\mathrm{mF}$$

电阻为

$$R=\frac{1}{0.072}=13.89\Omega$$

[例 6.11]　已知 $Z_1 = 10 + \mathrm{j}6.28\Omega$，$Z_2 = 20 - \mathrm{j}31.9\Omega$，$Z_3 = 15 + \mathrm{j}15.7\Omega$。电路如图 6.25 所示。求 Z_{ab} 和 Y_{ab}。

图 6.25　例 6.11 电路图

[解]

$$Z_{\mathrm{ab}} = Z_3 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = Z_3 + Z$$

$$Z = \frac{(10 + \mathrm{j}6.28)(20 - \mathrm{j}31.9)}{10 + \mathrm{j}6.28 + 20 - \mathrm{j}31.9}$$

$$= \frac{11.81\angle 32.13^\circ \times 37.65\angle(-57.91^\circ)}{39.45\angle(-40.5^\circ)}$$

$$= 10.88 + \mathrm{j}2.96$$

所以

$$Z_{\mathrm{ab}} = Z_3 + Z = 15 + \mathrm{j}15.7 + 10.88 + \mathrm{j}2.96$$

$$= 25.88 + \mathrm{j}18.66 = 31.9\angle 35.8^\circ\Omega$$

$$Y_{\mathrm{ab}} = \frac{1}{Z_{\mathrm{ab}}} = \frac{1}{25.88 + \mathrm{j}18.66} = \frac{1}{31.9\angle 35.8^\circ} = 0.03\angle -35.8^\circ \mathrm{S}$$

[例 6.12]　电路如图 6.26(a)所示，已知 $\omega = 10\mathrm{rad/s}$，试求含受控源电路的输入阻抗。

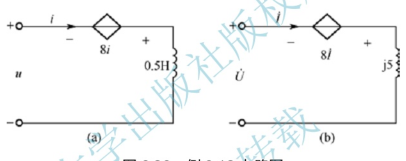


图 6.26　例 6.12 电路图

[解]　做出相量模型如图 6.26(b)所示。

设端电压、端电流为 $\dot{U}$、$\dot{I}$，利用 KVL 的相量形式，有：

$$\dot{U} = -8\dot{I} + \mathrm{j}5\dot{I} \qquad Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = -8 + \mathrm{j}5 = 9.4\angle 148^\circ\Omega$$

根据输入阻抗的值，含受控源的等效电路可以视为一个负电阻和电感的串联，其阻抗角大于 90°。

分析以上的所有例题，可以得到**结论：**

(1) 单口无源网络的串联等效电路和并联等效电路，并不是简单地将两个元件由串联变为并联，参数之间也不是简单的倒数关系，它们之间的关系见式(6.45)和式(6.46)；

(2) 阻抗和导纳是随频率改变而改变的，等效电路是对某一特定频率而言的。当频率改变时，阻抗和导纳改变，等效电路也随之不同；

(3) 如单口网络 N_0 中仅由 RLC 元件组合的电路，一定会有 $\mathrm{Re}[Z(\mathrm{j}\omega)] \geqslant 0$，或 $|\varphi_Z| \leqslant 90^\circ$；当单口网络中含有受控源时，可能会有阻抗的实部 $\mathrm{Re}[Z(\mathrm{j}\omega)] < 0$，或 $|\varphi_Z| > 90^\circ$ 的情况。

思考与练习

6.4-1　在 RLC 串联电路中，设各元件上电压、电流参考方向关联，问下列哪些表达式是正确的？

(1) $u=u_R+u_L+u_C$　　(2) $u=Ri+X_{Li}+X_{Ci}$　　(3) $\dot{U}=\dot{U}_R+\dot{U}_L+\dot{U}_C$

(4) $U=U_R+\mathrm{j}(U_L-U_C)$　　(5) $Z=R+\mathrm{j}(L+C)$　　(6) $Z=\sqrt{R^2+X^2}$

6.4-2　在 RLC 并联电路中，设各元件上电压、电流参考方向关联，问下列哪些表达式是正确的？

(1) $i=i_R+i_L+i_C$　　(2) $i=Gi+B_Li+B_Ci$　　(3) $\dot{I}=\dot{I}_R+\dot{I}_L+\dot{I}_C$

(4) $I=I_R+I_L+I_C$　　(5) $Y=G+\mathrm{j}(L+C)$　　(6) $Y=\sqrt{G^2+B^2}$

6.4-3　(1) 若某并联电路为电感性的，与其等效的串联电路，也一定是电感性的吗？

(2) 若某电路的阻抗为 $Z=(5+\mathrm{j}8)\Omega$，则导纳为 $Y=\left(\frac{1}{5}+\mathrm{j}\frac{1}{8}\right)\mathrm{S}$，对吗？为什么？

6.4-4　计算下列各题，并说明电路的性质。

(1) $\dot{U}=5\angle 60^\circ\,\mathrm{V}$，$Z=(5+\mathrm{j}5)\Omega$，$\dot{I}=?$

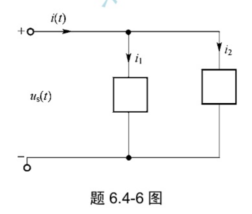
(2) $\dot{U}=-40\angle 30^\circ\,\mathrm{V}$，$\dot{I}=5\mathrm{e}^{-\mathrm{j}60^\circ}\,\mathrm{A}$，$R=?$，$X=?$

(3) $\dot{U}=60\angle 60^\circ\,\mathrm{V}$，$\dot{I}=-3\angle -135^\circ\,\mathrm{A}$，$G=?$，$B=?$

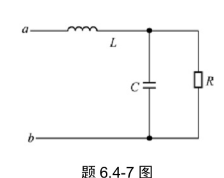
6.4-5　若在某频率时，电阻和电感的串联电路的相量模型的阻抗 $Z=(10+\mathrm{j}5)\Omega$，问在该频率时，等效的并联模型如何？

6.4-6　如图 6.4-6 所示，$u_S(t)=50\sqrt{2}\sin(10t+45^\circ)\mathrm{V}$，$i(t)=400\sqrt{2}\cos(10t+30^\circ)\mathrm{A}$，问这电路中的两个元件是什么？并标明其欧姆、亨利或法拉值。

6.4-7　如图 6.4-7 所示，当 ω 为多大时，ab 两端等效为一电阻？



题 6.4-6 图



题 6.4-7 图

6.5　正弦稳态电路分析

在分析正弦稳态电路时，把电压、电流用相量表示，RLC 元件用阻抗或导纳表示，得到电路的相量模型，分析比较电阻电路与正弦电流电路相量模型。

电阻电路

$$\begin{cases}\text{KCL}:0\sum i=\\ \text{KVL}:0\sum u=\\ \text{元件约束关系：}u=Ri\text{或}i=Gu\end{cases}$$

正弦电路相量分析

$$\begin{cases}\text{KCL}:0\sum \dot{I}=\\ \text{KVL}:0\sum \dot{U}=\\ \text{元件约束关系：}\dot{U}=Z\dot{I}\text{ 或 }\dot{I}=Y\dot{U}\end{cases}$$

可见，基尔霍夫定律和元件伏安关系的相量形式与电阻电路相应关系形式完全相同，因此，电阻电路的所有分析方法对正弦稳态电路都适用，也就是说，电阻电路的各种等效变换规则、支路法、网孔法、节点法等一般分析方法，以及叠加定理、戴维南定理和诺顿定理等都可以用来分析正弦稳态电路。在分析正弦稳态电路时要首先建立电路相量模型，在电路相量模型上仿照电阻电路的分析方法进行计算，不同的是所得电路方程为相量表示的代数方程及相量形式的电路定理，是用复数进行运算的。

6.5.1　网孔法的应用

[例 6.13] 电路如图 6.27(a)所示，已知 $i_{S1}=\sqrt{2}\sin(\omega t+30^\circ)\text{A}$，$u_{S1}=10\sqrt{2}\sin\omega t\text{V}$，$u_{S2}=15\sqrt{2}\sin(\omega t+45^\circ)\text{V}$，$\omega=10^3\text{rad/s}$，$R_1=5\Omega$，$R_2=10\Omega$，$L_1=L_2=10\text{mH}$，$\text{C}=100\mu\text{F}$ 试用网孔法求电流 $i_2(t)$。

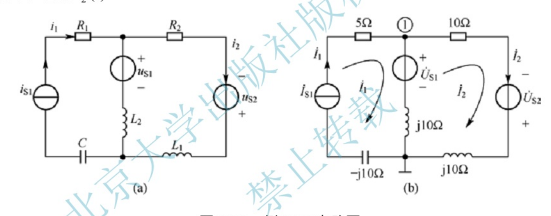


图 6.27　例 6.14 电路图

[解] 先做出图 6.27(a)电路的相量模型，如图 6.27(b)所示。其中

$$\dot{I}_{S1}=1\angle30^\circ\text{A}，\ \dot{U}_{S1}=10\angle0^\circ\text{V}，\ \dot{U}_{S2}=15\angle45^\circ\text{V}，\ \text{j}\omega L_1=\text{j}\omega L_2=\text{j}10\Omega，\ \frac{1}{\text{j}\omega C}=-\text{j}10\Omega$$

列网孔方程，与直流电阻方程类似，不同的是应设网孔电流分别为 $\dot{I}_1$，$\dot{I}_2$ 电流相量，而且应该用自阻抗和互阻抗来列方程，可见网孔电流 $\dot{I}_1$ 就是支路电流 $\dot{I}_1$，故网孔方程为

$$\begin{cases}\dot{I}_1=1\angle30^\circ\\ -\text{j}10\dot{I}_1+(10+\text{j}20)\dot{I}_2=15\angle45^\circ+10\angle0^\circ\end{cases}$$

求解得

$$\dot{I}_2=1.109\angle(-12.44^\circ)\text{A}$$

$$i_2=1.109\sqrt{2}\sin(10^3t-12.44^\circ)\text{A}$$

6.5.2　节点法的应用

[例 6.14] 例 6.13 也可以利用节点法求解，即电路如图 6.27(a)所示，用节点法求电流 $i_2(t)$。

[解] (1) 利用电路相量模型图 6.27(b)，将电压源和阻抗串联等效变换为电流源和阻抗并联后，流入流出节点①的电流为三个，等效电路图如图 6.28 所示。

(2) 列节点①方程时，与电流源串联的阻抗元件不出现在节点方程中，故节点①方程为

$$\left(\frac{1}{\mathrm{j}10}+\frac{1}{\mathrm{j}10+10}\right)\dot{U}_1=1\angle 30^\circ+\frac{10\angle 0^\circ}{\mathrm{j}10}-\frac{15\angle 45^\circ}{\mathrm{j}10+10}$$

求解得

$$\dot{U}_1=3.39\angle(-39.7^\circ)\mathrm{V}$$

利用图 6.27(b)，可得

$$\dot{I}_2=\frac{\dot{U}_1+\dot{U}_{S2}}{R_2+\mathrm{j}\omega L_1}=\frac{3.39\angle(-39.7^\circ)+15\angle 45^\circ}{10+\mathrm{j}10}=1.109\angle(-12.44^\circ)\mathrm{A}$$

(3) 写出响应　　$i_2=1.109\sqrt{2}\sin(10^3t-12.44^\circ)\mathrm{A}$

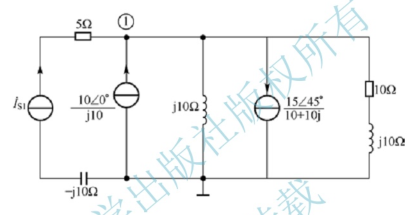


图 6.28　例 6.14 电路图

6.5.3　电源变换及戴维南定理的应用

从例 6.14 可知直流电路中的电源模型等效变换同样适用正弦稳态电路的分析。同样，一个有源二端网络，则可以等效为戴维南电路或诺顿电路。

[例 6.15] 电路如图 6.29(a)所示，已知 $\dot{I}_S=4\angle 90^\circ\mathrm{A}$，$Z_1=-\mathrm{j}30\Omega$，$Z_2=\mathrm{j}15\Omega$，$Z_3=30\Omega$，$Z=15\Omega$，求电流 $\dot{I}$。

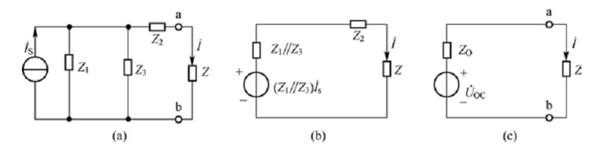


图 6.29　例 6.15 电路图

[解] 方法一：电源等效变换，电流源与阻抗并联可以等效为电压源与阻抗串联，如图 6.29(b)所示，阻抗为

$$Z_1//Z_3=15-\mathrm{j}15$$

等效电压源

$$\dot{U}_S = (Z_1 // Z_3)\dot{I}_S = j4 \times (15 - 15j) = 60 + 60j$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{I}_S (Z_1 // Z_3)}{Z_1 // Z_3 + Z_2 + Z} = \frac{j4(15 - j15)}{15 - j15 + j15 + 15}$$

$$= \frac{60 + 60j}{30} = 2\sqrt{2}\angle 45^\circ \text{ A}$$

方法二：戴维南等效变换。

(1) 将 Z 断开，求开路电压 $\dot{U}_{oc}$。

$$\dot{U}_{oc} = \dot{I}_S (Z_1 // Z_3) = 60 + 60j$$

(2) 求等效阻抗 Z_O。

$$Z_O = Z_1 // Z_3 + Z_2 = 15 - 15j + 15j = 15\Omega$$

(3) 等效电路如图 6.29(c)所示。

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_{oc}}{Z_O + Z} = \frac{60 + 60j}{15 + 15} = 2 + 2j = 2\sqrt{2}\angle 45^\circ$$

[例 6.16] 电路如图 6.30(a)所示，利用戴维南定理求 $\dot{U}_{ab}$ 和电流 $\dot{I}_{ab}$。

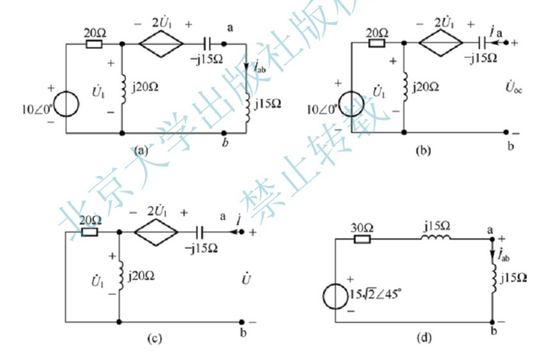


图 6.30　例 6.16 电路图

[解]　(1) 求开路电压 $\dot{U}_{oc}$。

将 ab 端断开，电路如图 6.30(b)，因为 $\dot{I} = 0$，所以电容上无电压。

$$U_{oc} = 2\dot{U}_1 + \dot{U}_1 = 3\dot{U}_1$$

利用分压公式：

$$\dot{U}_1 = \frac{j20}{20 + j20} \times 10\angle 0^\circ = 5\sqrt{2}\angle 45^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_{oc} = 3\dot{U}_1 = 3 \times 5\sqrt{2}\angle 45^\circ = 15\sqrt{2}\angle 45^\circ \text{ V}$$

(2) 求等效内阻抗 Z_o。

因为网络有受控源，不能利用阻抗的串、并联公式求 Z_o。利用外加电压源法，将内部的独立源置零后得到等效电路如图 6.30(c)所示，由阻抗定义 $Z_o=\dfrac{\dot U}{\dot I}$，对端口利用 KVL，有

$$\dot U=-\mathrm{j}15\dot I+3\dot U_1$$

而
$$\dot U_1=\frac{20\times(j20)}{20+j20}\dot I=(10+\mathrm{j}10)\dot I$$

$$\dot U=-\mathrm{j}15\dot I+3(10+\mathrm{j}10)\dot I=(30+\mathrm{j}15)\dot I$$

所以
$$Z_o=\frac{\dot U}{\dot I}=30+\mathrm{j}15$$

(3) 求 $\dot U_{ab}$ 和电流 $\dot I_{ab}$，等效电路如图 6.30(d)所示。

$$\dot I_{ab}=\frac{\dot U_{oc}}{Z_0+Z}=\frac{15\sqrt2\angle45^\circ}{30+\mathrm{j}15+\mathrm{j}15}=\frac{15+\mathrm{j}15}{30+\mathrm{j}30}=\frac12\mathrm{A}$$

$$\dot U_{ab}=\dot I\times15\mathrm{j}=\frac{15}{2}\mathrm{j}=7.5\angle90^\circ\ \mathrm{V}$$

6.5.4　相量图法的应用

在电工、电子技术中往往会遇到只需计算有效值的问题和只需计算相位差的问题，求解这类问题可以利用相量图法，即先定性地画出相量图，然后根据图形的特征解决问题。

[例 6.17]　图 6.31(a)所示电路中，$u_S(t)=\sqrt2U_S\sin\omega t$，求输出电压 $u_o(t)$ 对输入电压的 $u_S(t)$ 相位关系。

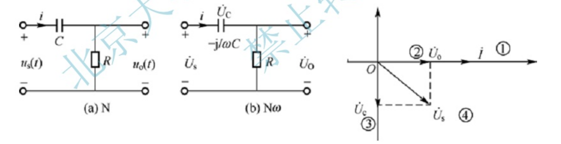


图 6.31　例 6.17 电路图

[解]　画出相量模型如图 6.31(b)所示，其中 $\dot U_S=U_S\angle0^\circ$

方法一：相量图法。

(1) 首先选取参考相量，画在正实轴上。本题是串联电路，宜取电流 $\dot I$ 为参考相量，在图 6.31(c)中，①表示第一笔画。

(2) 利用元件电压与电流的相位关系绘出各元件的电压相量，电阻元件的电压 $\dot U_O$ 应与 $\dot I$ 同相；电容元件的电压 $\dot U_C$ 滞后于 $\dot I$ 的角度为 90°，得图中的②和③。

(3) 根据 KVL 可知 $\dot U_S=\dot U_O+\dot U_C$。因此，$\dot U_S$ 应为 $\dot U_O$ 与 $\dot U_C$ 的相量和，得图中的④。

绘相量图的依据无非还是两类约束。就元件来说，特别要用到电压与电流的相位约束关系。

绘出相量图后，显然可见 $\dot U_O$ 总是超前于 $\dot U_S$ 的，其相位差角 φ 可在相量图上利用几何、

三角关系求得。由相量图中$\dot{U}_O$、$\dot{U}_C$和$\dot{U}_S$构成的直角三角形可得到：

$$\tan\varphi=\frac{U_C}{U_O}=\frac{\frac{1}{\omega C}I}{RI}=\frac{1}{\omega CR}$$

故得
$$\varphi=\arctan\left(\frac{1}{\omega CR}\right)$$

方法二：相量解析法(代数法)。

根据串联电路分压关系可得

$$\dot{U}_O=\dot{U}_S\frac{R}{R-j\frac{1}{\omega C}}=U_S\frac{R}{\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}\angle-\arctan\left(\frac{1}{\omega CR}\right)}$$

$$=U_O\angle\arctan\left(\frac{1}{\omega CR}\right)=U_O\angle\varphi_o$$

把$R-j\frac{1}{\omega C}$化为极坐标形式时，其幅角为$\arctan\left(\frac{-\frac{1}{\omega C}}{R}\right)$。由于虚部是负，实部为正，可断定幅角在第四象限，故幅角可以写作$-\arctan\left(\frac{1}{\omega C}\right)$。上式中$U_O$为输出电压$u_o$的有效值

$$U_o=\frac{U_S R}{\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

φ_o为输出电压u_o的相角$\varphi_o=\arctan\left(\frac{1}{\omega CR}\right)$，输出电压$u_o$与$u_S$的相位差为

$$\varphi=\varphi_o-\varphi_S=\arctan\left(\frac{1}{\omega CR}\right)>0$$

说明输出电压超前输入电压。角度为$\varphi=\arctan\left(\frac{1}{\omega CR}\right)$，介于$0^\circ\sim90^\circ$之间。

[例 6.18] 在如图 6.32(a)所示正弦稳态电路中，电流表 A、A_1、A_2的指示均为有效值，若 A 为 10A，A_1为 8A，求电流表 A_2的读数。

[解] 在解题时，初学者往往容易发生这样的错误：认为电流表A_2的读数是$10A-8A=2A$。实际上汇集在节点处电流的有效值一般是不满足 KCL 定律的，即$I\neq I_1+I_2$；满足 KCL 定律的是电流有效值相量即$\dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2$。

方法一：相量图法，电路相量模型如图 6.32(b)。因为是并联电路，以电压为参考相量，设电压$\dot{U}=U\angle0^\circ$，在水平方向作$\dot{U}$相量。因电阻的电压、电流同相，故相量$\dot{I}_1$与$\dot{U}$同相；因电感的电流滞后电压90°，故画相量$\dot{I}_2$垂直$\dot{U}$且滞后$\dot{U}$ 90°。如图 6.32(c)所示，这两个相量$\dot{I}_1$、$\dot{I}_2$所构成的平行四边形的对角线为$\dot{I}$，从图 6.32(c)中知为直角三角形的斜边，可得未知电流$\dot{I}_2$的有效值为

$$I_2 = \sqrt{I^2 - I_1^2} = \sqrt{10^2 - 8^2}\text{A} = 6\text{A}$$

故得电流表 A_2 的读数为 6A。

方法二：此题也可以用相量解析法计算，课后练习。

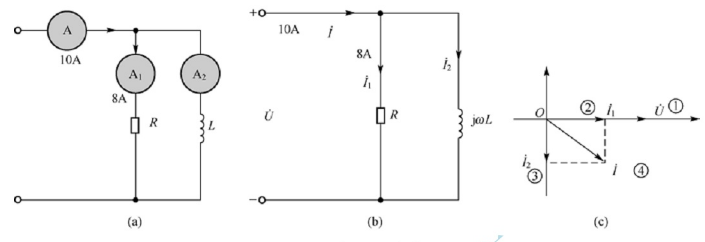


图 6.32　例 6.18 电路图

6.5.5　叠加定理的应用

应用叠加定理计算多个正弦电源作用下线性时不变电路的稳态响应时，需要注意到两种不同的情况：其一，正弦电源的频率相同；其二，正弦电源的频率不相同。

[例 6.19]　试用叠加定理求图 6.33(a)电路中 $i(t)$。已知：$i_S(t) = 10\sin(100t)\text{mA}$，$u_S(t) = -5\cos(100t)\text{V}$。

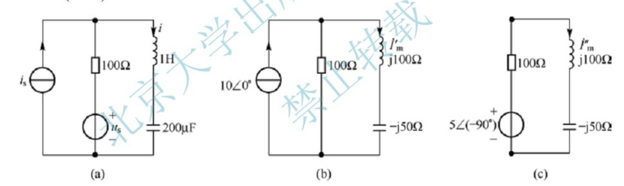


图 6.33　例 6.19 电路图

[解]　(1)　$i_S(t)$ 单独作用时的相量模型如图 6.33(b)所示，电压源短路，电流为

$$\dot{I}'_m = \left[\frac{100}{100 + \text{j}(100-50)} \times 10\angle 0^\circ\right]\text{mA} = 8 - \text{j}4$$
$$= 8.9\angle(-26.56^\circ)\text{mA}$$

(2)　$u_S(t)$ 单独作用时的相量模型如图 6.33(c)所示，此时，电流源开路，注意电压源此时为 $\dot{U}_S = 5\angle(-90^\circ)\text{V}$，则电流为

$$\dot{I}''_m = \left[\frac{5\angle(-90^\circ)}{100 + \text{j}(100-50)}\right]\text{A}$$
$$= \frac{5\angle(-90^\circ)}{111.8\angle 26.56^\circ}\text{A} = 0.0447\angle(-116.56^\circ)\text{A}$$
$$= 44.7\angle(-116.56^\circ)\text{mA}$$

(3) 两者叠加，结果为

$$\begin{aligned}\dot{I}_{\mathrm{m}} &= \dot{I}'_{\mathrm{m}} + \dot{I}''_{\mathrm{m}} = 8.945\angle(-26.56^\circ) + 44.7\angle(-116.56^\circ) \\ &= 8 - 4\mathrm{j} - 20 - 40\mathrm{j} \\ &= 45.6\angle(-105.21^\circ)\mathrm{mA}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}i(t) &= [8.9\sin(100t - 26.56^\circ) + 44.7\sin(100t - 116.56^\circ)]\mathrm{mA} \\ &= 45.6\sin(100t - 105.25^\circ)\mathrm{mA}\end{aligned}$$

注意：本题两个正弦激励为同频率，可以不用叠加方法。做出 $\omega = 100\mathrm{rad/s}$ 的相量模型也可用其他方法求得答案。

不同频率的电源作用于电路，因为做不出适合所有频率的相量模型，须用叠加定理求响应，即分别做出各个频率电源作用时对应的相量模型，求出对应的相量，并写出瞬时值，将瞬时值叠加。

[例 6.20] 如图 6.34(a)所示电路中，已知

$$u_{\mathrm{S}} = 20\sin(100t + 10^\circ)\mathrm{V} \qquad i_{\mathrm{S}} = \sqrt{2}\sin(200t + 50^\circ)\mathrm{A}$$

试用叠加定理求 u。

[解] 此题所加的激励为不同频率，求稳态响应时要应用叠加定理。

(1) 计算 u_{S} 单独作用时产生的电压 u'。用开路代替电流源 i_{S}，得到如图 6.34(b)所示相量模型。可以求得：

$$\dot{U}' = \frac{\mathrm{j}5}{5+\mathrm{j}5} \times \dot{U}_{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{j}}{1+\mathrm{j}} \times \frac{20}{\sqrt{2}}\angle 10^\circ = \frac{1+\mathrm{j}}{\sqrt{2}} \times 10\angle 10^\circ = 10\angle 55^\circ\mathrm{V}$$

$$u'(t) = 10\sqrt{2}\sin(100t + 55^\circ)\mathrm{V}$$

(2) 计算 i_{S} 单独作用时产生的电压 u''。用短路代替电压源 u_{S}，得到如图 6.34(c)所示相量模型，可以求得：

$$\dot{U}'' = \dot{I}'' \times \mathrm{j}10 = \frac{5}{5+\mathrm{j}10} \times 1\angle 50^\circ \times \mathrm{j}10 = 4.47\angle 76.56^\circ\mathrm{V}$$

$$u''(t) = 4.47\sqrt{2}\sin(200t + 76.6^\circ)\mathrm{V}$$

(3) 求 u。

将每个正弦电源单独作用时产生的电压相加，得到：

$$\begin{aligned}u &= u'(t) + u''(t) \\ &= [10\sqrt{2}\sin(100t + 55^\circ) + 4.47\sqrt{2}\sin(200t + 76.6^\circ)]\mathrm{V}\end{aligned}$$

图 6.34　例 6.20 电路图

由该例可见，各正弦电源单独作用时的正弦稳态响应，仍可用相量法求出，但应注意：由于动态元件的阻抗和导纳是频率的函数，因此计算时使用的相量模型是不同的。响应分量“叠加”必须在时间域中进行。

对线性时不变电路，无论各个激励的频率是否相同，其电压和电流的响应都可以利用叠加定理来进行求解，但对于功率计算就不能简单应用叠加定理，这将在第 7 章中讨论。

在工程实践中，电路信号除了正弦信号之外，非正弦的周期信号也广泛地出现，例如在自动控制、计算机等技术领域中大量应用的是脉冲电路，电压、电流都是非正弦信号。常见的非正弦周期信号有尖脉冲、矩形脉冲、锯齿波等，如图 6.35 所示。

非正弦周期信号电路的分析依据是线性电路的叠加定理，具体方法简述如下：

(1) 信号分解：将给定的非正弦激励信号分解为傅里叶级数，

$$f(t) = A_0 + A_1\cos\omega t + A_2\cos 2\omega t + A_3\cos 3\omega t + \cdots + B_1\sin\omega t + B_2\sin 2\omega t + B_3\sin 3\omega t + \cdots$$

$$= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k\cos k\omega t + B_k\sin k\omega t) \tag{6.47}$$

式(6.47)中，A_o、A_k、B_k 称为傅里叶系数。A_0 称作直流分量，$A_1\cos\omega t$ 和 $B_1\sin\omega t$ 称作基波分量，$A_2\cos 2\omega t$ 和 $B_2\sin 2\omega t$ 称为二次谐波分量等。

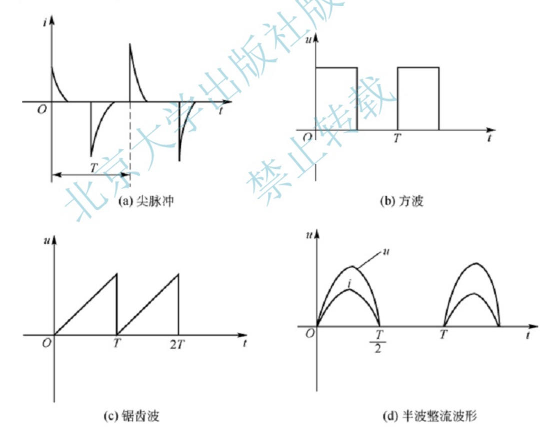


图 6.35　几种常见的非正弦周期信号

例如锯齿波幅度为 U_m，周期为 T，则傅里叶级数为

$$f(t) = U_m\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\left(\sin\omega t + \frac{1}{2}\sin 2\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{4}\sin 4\omega t + \cdots\right)\right]$$

(2) 计算各次谐波响应：分别计算各次谐波分量作用于电路时产生的响应，计算方法与直流电路及正弦交流稳态电路完全相同。但要**注意**：各次谐波分量作用于电路时需分别

做不同频率的相量模型，即电感和电容对不同频率的谐波有不同的电抗，对于直流分量，电感相当于短路，电容相当于开路。

(3) 叠加响应：应用叠加定理，将电路在各次谐波作用下的相量响应写出对应的瞬时值解析式，再进行叠加，求出非正弦电流(电压)的解析式。

注意：不同频率的正弦量不能进行相量相加，也不能画在同一相量图上，必须用瞬时值叠加。

(4) 非正弦周期信号的有效值计算。

正弦交流电的有效值在数值上等于与其在同一电阻上产生的热效应相等的直流电的大小。非正弦周期信号的有效值在定义上与正弦交流电相同。如用 I 表示该非正弦周期信号的有效值电流，I_1、I_2、…、I_N 表示各次谐波的有效值，则有

$$I^2R = I_0^2R + I_1^2R + I_2^2R + \cdots + I_N^2R$$

因此

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \cdots + I_N^2} \tag{6.48}$$

同理，如用 U 代表周期电压 $u(t)$ 的有效值，则

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \cdots + U_N^2} \tag{6.49}$$

式中，U_0 为直流电压分量的数值，U_1，U_2，…，U_N 为各次谐波不同频率正弦电压的有效值。

非正弦周期波在用傅里叶级数分解为直流分量和各次谐波分量后，可以利用式(6.48)，式(6.49)计算该非正弦波的有效值。

[例 6.21] 如图 6.36(a)所示电路中，激励为非正弦周期信号，即激励为

$$u(t) = 45 + 180\sin 10t + 60\sin 30t + 30\sin 50t \text{ V}$$

求电流 $i(t)$ 及其有效值 I 。

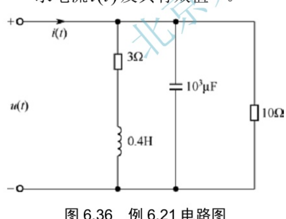


图 6.36　例 6.21 电路图

[解] 首先，运用叠加定理，分别计算出输入电压各谐波分量单独作用时的电流分量。然后，在时域进行叠加，求出输入电流 $i(t)$；最后，按非正弦周期函数有效值的计算公式，计算出 $i(t)$ 的有效值 I。

(1) 计算输入电流 $i(t)$。

激励 $u(t)$ 表达式右边四项可视为四个串联电压源电压的和。

① 当直流分量电压单独作用时，此时电感为短路，电容为开路，电路的导纳为

$$Y_0 = \frac{1}{3}\text{S} + \frac{1}{10}\text{S} = \frac{13}{30}\text{S}$$

故输入直流分量电流为

$$I_0 = Y_0U_0 = \frac{13}{30} \times 45\text{A} = 19.5\text{A}$$

② 基波电压分量单独作用时，电路导纳为

$$
\begin{aligned}
Y(\mathrm{j}\omega) &= \frac{1}{3+\mathrm{j}4} + \frac{1}{10} + \mathrm{j}10\times10^{3}\times10^{-6} \\
&= 0.1 + 0.12 - \mathrm{j}0.16 + \mathrm{j}0.01 \\
&= 0.22 - \mathrm{j}0.15 = 0.266\angle(-34.3^{\circ})\mathrm{S}
\end{aligned}
$$



故基波电流为

$$\dot{I}_{1m} = Y(j\omega)\dot{U}_{1m} = 0.266\angle(-34.3^\circ)\times 180\angle 0^\circ$$
$$= 47.88\angle(-34.3^\circ)\text{A}$$
$$i_1(t) = 47.88\sin(10t - 34.3^\circ)\text{A}$$

③ 三次谐波电压单独作用时，电路的导纳为

$$Y(j3\omega) = \frac{1}{3 + j4\times 3} + \frac{1}{10} + j0.03 = 0.12 - j0.048 = 0.13\angle(-21.8^\circ)\text{S}$$

故三次谐波电流为

$$\dot{I}_{3m} = Y(j3\omega)\dot{U}_{3m} = 0.13\angle(-21.8^\circ)\times 60\angle 0^\circ = 7.8\angle(-21.8^\circ)\text{A}$$
$$i_3(t) = 7.8\sin(30t - 21.8^\circ)\text{A}$$

④ 同理五次谐波电压单独作用时，电路的电流为

$$\dot{I}_{5m} = Y(j5\omega)\dot{U}_{5m}$$
$$= 0.107\angle 0.54^\circ \times 30\angle 0^\circ$$
$$= 3.21\angle 0.54^\circ\ \text{A}$$
$$i_5(t) = 3.21\sin(50t + 0.54^\circ)\text{A}$$

⑤ 利用叠加定理，求出端口输入电流为

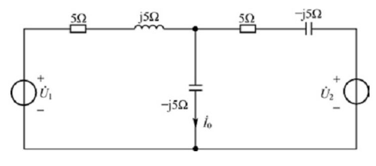
$$i(t) = 19.5 + 47.88\sin(10t - 34.3^\circ) + 7.8\sin(30t - 21.8^\circ) + 3.21\sin(50t + 0.54^\circ)\text{A}$$

(2) 计算电流 $i(t)$ 的有效值为

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_3^2 + I_5^2}$$
$$= \sqrt{19.5^2 + \left(\frac{47.88}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{7.8}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{3.21}{\sqrt{2}}\right)^2}$$
$$= \sqrt{380.25 + 1146.25 + 30.42 + 5.15}$$
$$= 39.52\text{A}$$

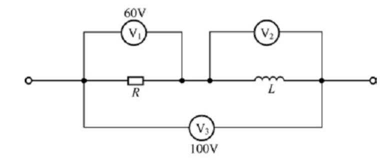
思考与练习

6.5-1　电路模型如题 6.5-1 图所示，已知 $\dot{U}_1 = 100\angle 0^\circ\text{V}$，$\dot{U}_2 = 100\angle 53.1^\circ\text{V}$，试分别用网孔分析法、节点分析法、叠加定理和戴维南定理求解 $\dot{I}_0$。($\dot{I}_0 = 6.32\angle 71.6^\circ\text{A}$)



题 6.5-1 图

6.5-2　题 6.5-2 图所示电路中，各电压表指示有效值，试求电压表 V_2 的读数。(80V)



题 6.5-2 图

6.6　实 际 应 用

在电子仪器与测量中，常常利用交流电桥电路测量电感或电容。

交流电桥电路如图 6.37 所示，电桥平衡条件与电阻电桥电路相似，所以当 $\dot{I}=0$ 时，交流电桥平衡

$$Z_2Z_4 - Z_1Z_3 = 0$$

即

$$Z_2Z_4 = Z_1Z_3 \tag{6.50}$$

可以利用式(6.50)测量电感或电容，如图 6.37(b)，已知 C，R_3 的大小，R_1 为可调电阻，并可知其阻值，未知电感为 L_x。调电阻 R_1 的大小，使电流表的读数为零。那么有

$$R_1R_3 = Z_2Z_4 = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\mathrm{j}\omega L_x$$

$$L_x = R_1R_3C$$

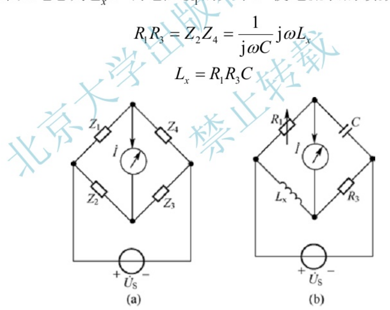


图 6.37　交流电桥电路

该方法也可以测量电容。

在实验室里可以利用三电压表法来测定未知交流电路的参数。

[例 6.22]　在图 6.38(a)所示电路中，为测定某电感线圈的参数 L_2和R_2，将待测元件与已知的电阻元件 R_1 串联，并接在正弦交流电源两端。用交流电压表测电源两端电压为 220V，电阻 R_1 和线圈两端的电压分别为 110V、176V。并且知道电阻 $R_1=55\Omega$，电源的工频为 $f=50\text{Hz}$，试求线圈的参数 L_2和R_2。

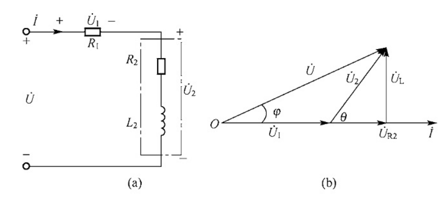


图 6.38　例 6.22 电路图

[解]　交流电压表的读数都是有效值，因为是串联电路以电流相量 $\dot{I}$ 为参考相量。

方法一：此题利用相量代数法简便，I 为 $i(t)$的有效值，其值的大小 $I = U_1 / R_1 = 110/55 = 2\text{A}$ 为，令 $\dot{I} = 2\angle 0^\circ$，端电压相量为 $\dot{U} = U\angle\varphi = 220\angle\varphi$，电感线圈两端电压相量为 $\dot{U}_2 = U_2\angle\theta = 176\angle\theta$ 列方程：

$$\dot{I}[R_1 + (R_2 + \mathrm{j}\omega L_2)] = 220\angle\varphi$$

$$\dot{I}(R_2 + \mathrm{j}\omega L_2) = 176\angle\theta$$

得

$$2\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (\omega L_2)^2} = 220$$

$$2\sqrt{R_2^2 + (\omega L_2)^2} = 176$$

联立以上两式，可解得 R_2 和 L_2

$$R_2 = 12.1\Omega,\ L_2 = 277.6\text{mH}$$

方法二：画相量图进行分析，以电流 $\dot{I}$ 为参考相量，绘相量图，电阻 R_1 的电压 $\dot{U}_1$ 与电流同相，电阻 R_2 的电压 $\dot{U}_{R2}$ 也是与电流同相，电感 L_2 的电压 $\dot{U}_L$ 超前电流 90°，$\dot{U}_{R2}$ 和 $\dot{U}_L$ 之和为 $\dot{U}_2$，长度为 176，如图 6.38(b)；电阻 R_1 的电压 $\dot{U}_1$ 与 $\dot{U}_2$ 之和为 $\dot{U}$。

由余弦定理可以求得

$$U^2 = U_1^2 + U_2^2 - 2U_1U_2\cos(180^\circ - \theta) = U_1^2 + U_2^2 + 2U_1U_2\cos\theta$$

$$\cos\theta = 0.1376$$

$$\theta = 82.1^\circ$$

$$I = U_1 / R_1 = 110/55 = 2\text{A}$$

$$|Z_2| = U_2 / I = 176/2 = 88\Omega$$

利用阻抗三角形，可求得

$$R_2 = |Z_2|\cos\theta = 12.1\Omega$$

$$X_2 = |Z_2|\sin\theta = 87.16\Omega$$

$$L_2 = X_2/(2\pi f) = 0.277\text{H} = 277.5\text{mH}$$

[例 6.23] 图 6.39(a)所示为全波整流器的输出电压波形，与想得到的直流波形相距较远，为使波形更接近直流，在整流器的输出端与负载间接入 LC 滤波器如图 6.39(b)。已知 $L = 10\text{mH}$，$C = 10\mu\text{F}$，$R = 3\text{k}\Omega$，$T = 10\text{ms}$。试求输出波形 $u_2(t)$ 中的直流分量、基波和二次谐波。

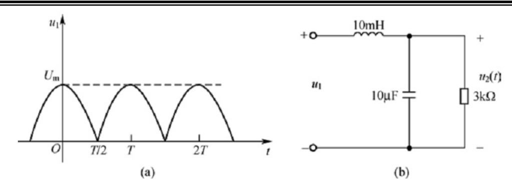


图 6.39　例 6.23 电路图

[解] (1) 图 6.39(a)是非正弦周期信号，可以利用傅里叶级数展开，即

$$u_1(t)=\frac{2U_m}{\pi}\left(1+\frac{2}{3}\cos\omega t-\frac{2}{15}\cos 2\omega t+\frac{2}{35}\cos 3\omega t+\cdots\right)$$

式中
$$\omega=\frac{2\pi}{T}=2\times 314=628\text{rad/s}$$

(2) 对于直流分量，电感相当于短路，电容相当于开路，故输出电压为

$$U_{20}=\frac{2}{\pi}U_m(V)$$

(3) 基波分量作用时相量模型如图 6.40(a)所示，此时，$Z_{L1}=j\omega L=j628\times 10\times 10^{-3}=j6.28\Omega$，容抗为

$$Z_{C1}=\frac{1}{j\omega C}=-j\frac{1}{628\times 10\times 10^{-6}}=-j159\Omega$$

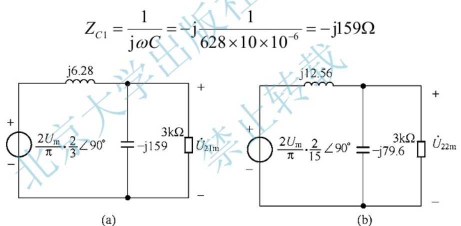


图 6.40　例 6.23 图相量模型

电阻与电容并联阻抗为

$$Z_{RC1}=\frac{RZ_{C1}}{R+Z_{C1}}=\frac{3\times 10^3\times(-j159)}{3\times 10^3-j159}=158\angle(-87^\circ)(\Omega)$$

输出电压的基波分量为

$$\dot{U}_{21m}=\frac{Z_{RC1}}{Z_{L1}+Z_{RC1}}\times\dot{U}_{11}=\frac{158\angle(-87^\circ)}{j6.28+158\angle(-87^\circ)}\times\frac{2U_m}{\pi}\times\frac{2}{3}\angle 90^\circ$$

$$=\frac{2}{\pi}U_m\times 0.69\angle 90.13^\circ\text{ V}$$

(4) 二次谐波分量作用时相量模型如图 6.40(b)所示。此时

$$Z_{L2}=j2\omega L=j628\times 2\times 10\times 10^{-3}=j12.56\Omega$$

同理可求得：　　$Z_{C2}=\dfrac{1}{\text{j}2\omega C}=-\text{j}\dfrac{1}{628\times2\times10\times10^{-6}}=-\text{j}79.6\Omega$

可求得 $u_1(t)$ 的二次谐波引起的输出电压为

$$\dot{U}_{22\text{m}}=\frac{2}{\pi}U_{\text{m}}\times0.16\angle89.7^\circ\text{V}$$

可见输出电压的二次谐波分量振幅已经较小，高次谐波振幅则更小，可认为已被滤除。因此，输出电压可以表示为

$$u_2(t)=\frac{2}{\pi}U_{\text{m}}[1+0.69\sin(\omega t+90.13)-0.16\sin(2\omega t+89.7)]\text{V}$$

正弦稳态分析具有广泛的理论及实际意义。在生活和工程实践中，许多电气设备的性能指标是按正弦稳态来考虑的，交流发电机产生的是正弦电压，电力系统中大多数是正弦稳态电路；无线电通信以及电视广播中的载波也是正弦波；自控和计算机中常遇到的非正弦周期波，也可以借助傅里叶级数分解为一系列不同频率的正弦波，因此正弦稳态分析具有实际意义。

6.7　小　　结

1. 正弦量的三要素及其相量表示

正弦量的解析式表达式为

$$i(t)=I_{\text{m}}\sin(\omega t+\varphi_i)=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\varphi_i)$$

振幅 I_{m}(有效值 I)、角频率 ω (或频率 f 及周期 T)、初相 φ_i 是正弦量的三要素。

$\dot{I}_{\text{m}}=\sqrt{2}I\angle\varphi_i$ ($\dot{I}=I\angle\varphi_i$)称为电流振幅相量(有效值相量)。正弦量与其相量有着一一对应的关系：

$$i\xleftrightarrow{\text{一一对应}}\dot{I}_{\text{m}}=\sqrt{2}I\angle\varphi_i\xleftrightarrow{\text{一一对应}}\dot{I}=I\angle\varphi$$

2. 两类约束的相量形式

1) RLC 的 VCR 的相量形式

电阻、电感和电容元件上电压与电流之间的相量关系如表 6-1，应该很好的理解和掌握。

表 6-1　RLC 的 VCR 的相量形式

元件名称	相量关系	有效值关系	相位关系	相量图
电阻 R	$\dot{U}_R=R\dot{I}$	$U_R=RI$	$\varphi_u=\varphi_i$	$\dot{I}_{\text{R}}$　$\dot{U}_{\text{R}}$
电感 L	$\dot{U}_L=\text{j}X_L\dot{I}$	$U_L=X_LI$	$\varphi_u=\varphi_i+90^\circ$	$\dot{U}_{\text{L}}$　$\dot{I}_{\text{L}}$
电容 C	$\dot{U}_C=-\text{j}X_C\dot{I}$	$U_C=X_CI$	$\varphi_u=\varphi_i-90^\circ$	$\dot{I}_{\text{C}}$　$\dot{U}_{\text{C}}$

2) 基尔霍夫定律的相量形式

KCL 和 KVL 的相量形式为

$$\sum \dot{I} = 0 \quad 和 \quad \sum \dot{U} = 0$$

3. 阻抗、导纳、相量模型

1) 阻抗和导纳

无源二端网络：$Z = \dfrac{\dot{U}}{\dot{I}} = |Z|\angle\varphi_Z$ 称为阻抗；$Y = \dfrac{\dot{I}}{\dot{U}} = |Y|\angle\varphi_Y$ 称为导纳。Z 和 Y 满足互为倒数关系。当 $\varphi_Z > 0$ 或 $\varphi_Y < 0$ 时，电路呈电感性；当 $\varphi_Z < 0$ 或 $\varphi_Y > 0$ 时，电路呈电容性；当 $\varphi_Z = \varphi_Y = 0$ 时，电路呈电阻性；

2) 阻抗和导纳的转换

$$Z = R + \mathrm{j}X,\ \mathrm{j}\ 则 Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R+\mathrm{j}X}\mathrm{j} = \frac{1}{R^2+X^2} + \left(\frac{-X}{R^2+X^2}\right) = G + \ B$$

表明一个由电阻 R 和电抗 X 相串联的阻抗可等效成一个由电导 G 和电纳 B 相并联的导纳。

3) 相量模型

在正弦稳态情况下，将时域模型中的正弦量表示为相量，无源元件参数表示为阻抗或导纳，这样得到的模型称为电路的相量模型。相量模型与时域模型具有相同的电路结构，其中 $R \longrightarrow R$，$L \longrightarrow \mathrm{j}\omega L$，$C \longrightarrow \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}$；该模型中电压、电流都使用正弦量，$u \longrightarrow \dot{U}$，$i \longrightarrow \dot{I}$，$u_R \longrightarrow \dot{U}_R$，$u_L \longrightarrow \dot{U}_L$，$u_C \longrightarrow \dot{U}_C$，其参考方向不变。

4. 正弦稳态电路的相量分析法

1) 网孔分析法

主要以网孔电流相量为求解变量列方程组来求解，列方程时方法同电阻电路，不同的是要利用自阻抗、互阻抗和电流的相量。

2) 节点分析法

以节点电压相量为求解变量列方程组求解，列方程的方法同电阻电路，不同的是要利用自电导、互电导和电压相量。

3) 电源变换及戴维南定理的应用

一个电压源与一个阻抗串联的电路可以等效为一个电流源与一个阻抗并联的电路。

含源二端网络的等效电路为戴维南等效电路，即等效为开路电压 $\dot{U}_{\mathrm{oc}}$ 和等效阻抗 Z_{o} 串联；也可等效为短路电流 $\dot{I}_{\mathrm{sc}}$ 和等效阻抗 Z_{o} 并联，即为诺顿等效电路。

4) 相量图法

相量图法是通过作电流、电压的相量图求得未知相量。画相量图时要选择参考相量，令该相量的初相为零。通常，对于串联电路，选电流相量作为参考相量；对于并联电路，选择电压相量为参考相量。从参考相量出发，利用元件 VCR 及 KCL、KVL 确定有关电流电压间的相量关系，定性画出相量图。利用相量图表示的几何关系，求得所需的电流、电压相量。

5) 正弦稳态的叠加

在电路中，若各激励源的频率不同，只能用叠加法来求解。要分别做出各个频率电源

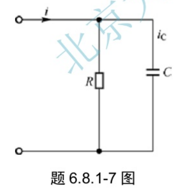
作用时对应的相量模型，求出对应的相量，再写出瞬时值，将瞬时值叠加。

激励为非正弦周期信号 $f(t)$ 可以将其表示为傅里叶级数，然后利用叠加定理求响应。

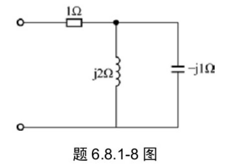
6.8　习　　题

6.8.1　填空题

1. 交流测量仪表上的读数是__________。
2. 已知正弦电压 $u_A = 220\sqrt{2}\sin 314t\text{V}$，$u_B = 380\sqrt{2}\sin(314t - 120^\circ)\text{V}$，则它们的最大值相量分别是：$\dot{U}_{Am}$ =__________，$\dot{U}_{Bm}$ =__________。
3. $f = 50\text{Hz}$ 的正弦交流电路电压，其角频率 ω =__________。若用电压表测出 220V，则其瞬时值表达式是 u =__________。
4. 一个 $C = 50\mu\text{F}$ 的电容器，其端电压 $u = 10\sin 314t\text{V}$，则其容抗 X_C =__________，电流 I_C =__________。
5. 若同频率正弦电压 $u_1(t)$ 及 $u_2(t)$ 的有效值为 U_1 及 U_2，$u_1(t)+u_2(t)$ 的有效值为 U。当 U_1 与 U_2 关系为__________，则有 $U_1^2+U_2^2=U^2$。
6. 当电路中有两个以上的激励电源，并且电源的频率不是同一个频率时，计算某个支路电流时可用__________方法求得。
7. 电路如题 6.8.1-7 图，已知 $R = 10\text{k}\Omega$，$C = 0.2\mu\text{F}$，$i = 1.58\sin(10^3 t + 33.4^\circ)\text{mA}$，电流 i_C =__________mA。
8. 电路如题 6.8.1-8 图所示，等效输入阻抗为 Z =__________，输入导纳 Y =__________。

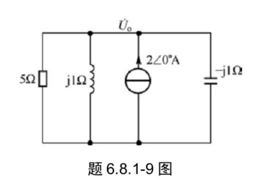


题 6.8.1-7 图

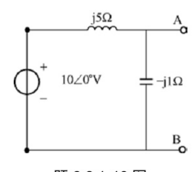


题 6.8.1-8 图

9. 电路如题 6.8.1-9 图所示，利用节点分析法可以求得电路中的电压 $\dot{U}_o$ =__________。
10. 电路如题 6.8.1-10 图所示，a、b 端的诺顿等效短路电流是__________。



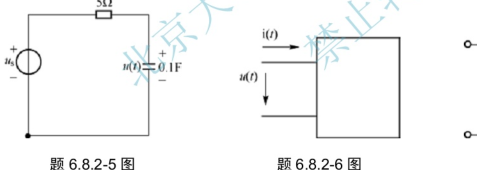
题 6.8.1-9 图



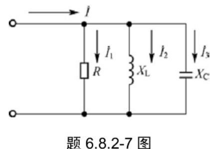
题 6.8.1-10 图

6.8.2 选择题

1. 相量法适用于(　　)的分析。
   A. 任何交流和直流电路　　B. 任意波形的交流电路　　C. 正弦交流电路
2. 在下式中，仅有(　　)式为正确。
   A. $\dfrac{u}{i}=x_L$　　B. $\dfrac{u}{i}=R$　　C. $\dfrac{U}{I}=-\mathrm{j}\dfrac{1}{\omega c}$
3. 阻抗的虚部称作(　　)。
   A. 电阻　　B. 电纳　　C. 电抗　　D. 电导
4. 正弦交流电路中，基尔霍夫电流定律可表示为(　　)。
   A. $\sum i=0$　　B. $\sum I=0$　　C. $\sum\dfrac{U}{Z}=0$
5. 电路如题 6.8.2-5 图所示，已知 $u_S(t)=\sqrt{2}\times 10\sin(2t)$ V 电容两端的电压为(　　)。
   A. $u(t)=5\sqrt{2}\sin(2t-45^\circ)$V　　B. $u(t)=10\sin(2t-45^\circ)$V
   C. $u(t)=10\sin(2t+45^\circ)$V
6. 已知无源二端网络输入端的电压和电流分别为 $u(t)=\sqrt{2}\times 220\sin(314t+30^\circ)$V，$i(t)=\sqrt{2}\times 22\sin(314t+90^\circ)$A，如题 6.8.2-6 图则此二端网络的等效电路为(　　)。
   A. R 与 L 串联　　B. R 与 C 串联　　C. L 与 C 串联
7. 电路如图所示，已知 $I_1=3$A，$I_2=4$A，$I_3=8$A，则 I 等于(　　)。
   A. 1A　　B. 5A　　C. 15A

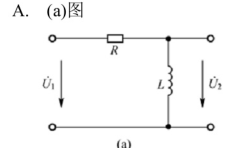


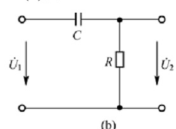
题 6.8.2-5 图　　题 6.8.2-6 图

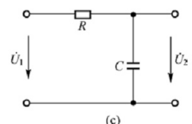


题 6.8.2-7 图

8. 题 6.8.2-8 图所示电路中，输出电压 $\dot{U}_2$ 滞后于输入电压 $\dot{U}_1$ 的电路是(　　)。
   A. (a)图　　B. (b)图　　C. (c)图







题 6.8.2-8 图

9. 对非正弦周期电流电路进行分析时，不同谐波的电路阻抗(　　)。
   A. 不同　　B. 相同　　C. 模相同

10. 已知单口网络的电压 $u(t)=10+10\sin(314t)+5\sin(942t)\text{V}$，单口网络电压的有效值为（　）。

A. 10.6V　　B. 15V　　C. 12.7V

6.8.3 计算题

1. 已知正弦电压 $u(t)=220\sqrt{2}\sin(628t-30^{\circ})\text{V}$，试求其最大值、有效值、频率、角频率、周期，并画出其波形图。
2. 求对应正弦量的相量：

(1) $-7\sin(10t-35^{\circ})$；　(2) $4\cos(6t)+3\sin(6t)$。

3. 正弦电流的振幅 $I_m=10\text{mA}$，角频率 $\omega=10^3\text{rad/s}$，初相角 $\varphi_i=30^{\circ}$。写出其瞬时表达式，求电流的有效值 I。
4. 若已知 $i_1(t)=-5\sin(314t+60^{\circ})\text{A}$，$i_2(t)=4\cos(314t+60^{\circ})\text{A}$

(1) 写出 $i_1(t)$，$i_2(t)$ 电流的相量表达式，并绘出它们的相量图；

(2) 求 $i_1(t)$ 与 $i_2(t)$ 的相位差，并判断相位关系；

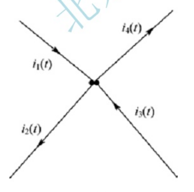
(3) 绘出 $i_1(t)$ 的波形；

(4) 求 $i_1(t)-i_2(t)$。

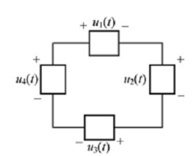
5. 画出下列电压、电流的相量图，并写出其对应相量的正弦量。

(1) $\dot{I}_1=-8-6\text{jA}$；　(2) $\dot{U}_2=10\text{jV}$；　(3) $I_3=4\text{e}^{-\text{j}45^{\circ}}\text{A}$；　(4) $\dot{U}_4=220\angle-30^{\circ}\text{V}$。

6. 电路如题 6.8.3-6 图所示，已知 $i_1(t)=50\sqrt{2}\sin(10t+30^{\circ})\text{A}$，$i_2(t)=30\sqrt{2}\sin(10t)\text{A}$，$i_3(t)=40\sqrt{2}\cos(10t+120^{\circ})\text{A}$，试用相量法求 $i_4(t)$。
7. 题 6.8.3-7 图所示电路中，已知 $u_1(t)=80\sin(50t+36.86^{\circ})\text{V}$，$u_2(t)=60\sin(50t+126.9^{\circ})\text{V}$，$u_3(t)=120\sin(50t-53.13^{\circ})\text{V}$，求 $u_4(t)$ 并绘相量图。



题 6.8.3-6 图



题 6.8.3-7 图

8. 已知元件 A 的正弦电流 $i(t)=3\sqrt{2}\sin(1000t+60^{\circ})\text{mA}$，求元件 A 两端的电压 $u(t)$，若 A 为(1) $R=4\text{k}\Omega$ 的电阻；(2) $L=10\text{H}$ 的电感；(3) $C=1\mu\text{F}$ 的电容。
9. 已知单口网络的端口电压、电流相量分别为 $\dot{U}=50\angle-30^{\circ}\text{V}$、$\dot{I}=-100\angle-150^{\circ}\text{A}$。它们的频率为 $\omega=100\text{rad/s}$：

(1) 写出 u 与 i 的时域形式；

(2) 求与 u 与 i 的相位差，并判断 u、i 的相位关系；

(3) 该单口网络为一个元件求此元件为什么元件？并求其值？

10. 某一元件的电压、电流为关联方向，分别是下面四种情况时，它可能是什么元件？

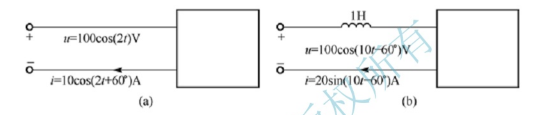
(1) $\begin{cases} u(t)=10\sin(10t-45^{\circ})\text{V} \\ i(t)=2\cos(10t-135^{\circ})\text{A} \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} u(t)=10\sin(100t)\text{V} \\ i(t)=2\cos(100t)\text{A} \end{cases}$

(3) $\begin{cases} u(t)=-10\cos(2t)\text{V} \\ i(t)=-\sin(2t)\text{A} \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} u(t)=10\sqrt{2}\sin(314t+45^{\circ})\text{V} \\ i(t)=\sqrt{2}\sin(314t)\text{A} \end{cases}$

11. 在电压为 220V，频率为 $f=50\text{Hz}$ 的交流电路中，接入一组白炽灯，其总电阻为 11Ω。计算电灯组的电流的有效值，做出电压、电流的相量图。

12. RLC 串联电路中，已知 $u(t)=100\sqrt{2}\sin(314t+20^{\circ})\text{V}$，$R=300\Omega$，$L=0.7\text{H}$，$C=4.3\mu\text{F}$。试求：(1) Z，$|Z|$；(2)电路总电流 I 和 $\dot{I}$；(3)做出电压和电流的相量图。

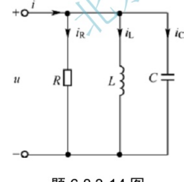
13. 电路如题 6.8.3-13 图所示，试确定方框内最简单串联组合的元件值。



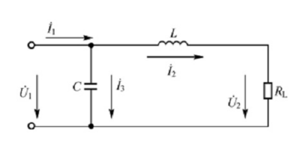
题 6.8.3-13

14. RCL 并联电路如题 6.8.3-14 图所示，已知 $u=10\sqrt{2}\sin(10^{4}t)\text{V}$，$R=50\Omega$，$L=2.5\text{mH}$，$C=5\mu\text{F}$。求：(1)电流 $\dot{I}_R$、$\dot{I}_C$、$\dot{I}_L$ 和 i_R、i_C、i_L，并画出相量图；(2) 求等效导纳 Y 和电流 $\dot{I}$。

15. 电路如题 6.8.3-15 图所示中，已知：$U_1=220\text{V}$，$f=50\text{Hz}$，$L=3.2\text{mH}$，$C=637\mu\text{F}$，$R_\text{L}=5\Omega$，求：(1) $\dot{I}_1$、$\dot{I}_2$、$\dot{I}_3$ 并做出相量图；(2)求出电路的等效导纳 Y。



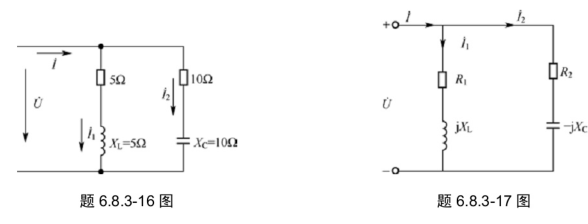
题 6.8.3-14 图



题 6.8.3-15 图

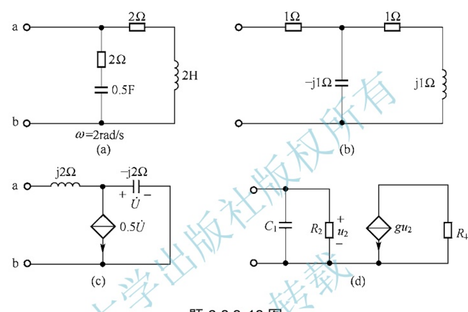
16. 电路如题 6.8.3-16 图中，已知 $\dot{I}_1=10\text{A}$，试求：$\dot{U}$、$\dot{I}_2$ 及 $\dot{I}$，并做出它们的相量图。

17. 电路如题 6.8.3-17 图所示，已知 $\dot{I}_1=20\angle-36.9^{\circ}\text{A}$，$\dot{I}_2=10\angle45^{\circ}\text{A}$，电压 $U=100\angle0^{\circ}\text{V}$。求：元件 R_1、X_L、R_2、X_C 和输入阻抗 Z。



题 6.8.3-16 图　　　　题 6.8.3-17 图

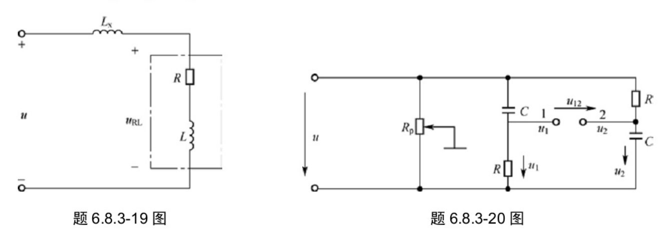
18. 试求电路题 6.8.3-18 图中各电路的输入阻抗 Z 和输入导纳 Y。



题 6.8.3-18 图

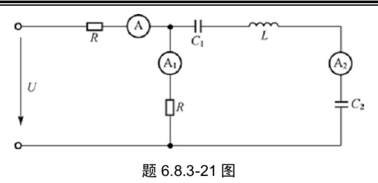
19. 在电风扇的电动机绕组中，串联一个电感进行调速，等效电路如题 6.8.3-19 图所示，$R=190\Omega$、$X_L=260\Omega$，电源电压为 220V，$f=50\text{Hz}$，要使 $u_{R_L}=180\text{V}$，问串联的电感应为多大？

20. 电路如题 6.8.3-20 图所示，已知 $R=1/\omega C$，$u=U_m\sin(314t+30^\circ)\text{V}$，可调电阻 R_p 中点接地。试求 u_1、u_2 和 u_{12}。



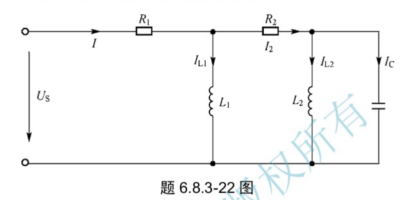
题 6.8.3-19 图　　　　题 6.8.3-20 图

21. 电路如题 6.8.3-21 图所示。已知 $R=100\Omega$，$L=1\text{H}$，$C_1=20\mu\text{F}$，$C_2=80\mu\text{F}$，$u_1=200\sqrt{2}\sin(250t+20^\circ)\text{V}$。求各电流表的读数及输入阻抗。



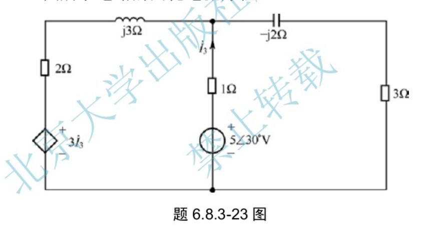
题 6.8.3-21 图

22. 如 6.8.3-22 图所示电路中，已知 $R_1=100\ \Omega$，$L_1=1\text{H}$，$L_2=1\text{H}$，$R_2=200\Omega$ 电流 $\dot{I}_2=0\text{A}$，$u_S=100\sqrt{2}\angle 0^\circ\text{V}$，$\omega=100\ \text{rad/s}$。求各支路电流。



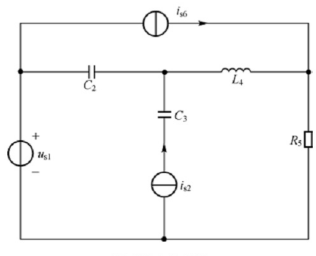
题 6.8.3-22 图

23. 试列出题 6.8.3-23 图所示电路的网孔电流方程。



题 6.8.3-23 图

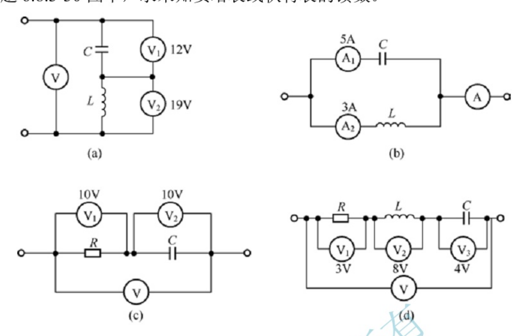
24. 电路如题 6.8.3-24 图所示，试列写其相量形式的网孔电压方程和节点电流方程。



题 6.8.3-24 图

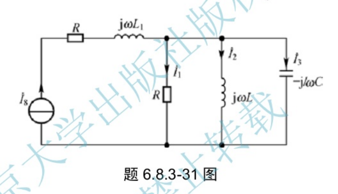
25. 电路如题 6.8.3-25 图所示，利用节点电压法、网孔电流法、叠加定理方法求 $\dot{I}_L$、$\dot{U}_C$。

30. 在电路题 6.8.3-30 图中，求未知安培表或伏特表的读数。



题 6.8.3-30 图

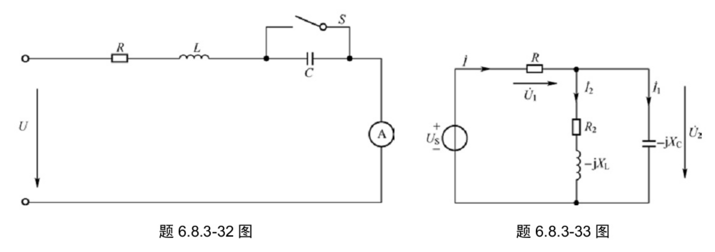
31. 已知题 6.8.3-31 图所示正弦稳态电路中，电流有效值 $I_S = 5\text{A}$，$I_2 = 3\text{A}$，$I_3 = 7\text{A}$。求 I_1。



题 6.8.3-31 图

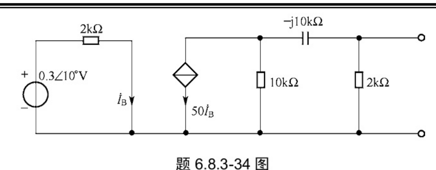
32. 电路如题 6.8.3-32 图所示。已知 $X_C = 48\Omega$，$U = 120\text{V}$，$f = 50\text{Hz}$。开关 S 合上或断开，电流表的读数均为 4A，求 R 和 L 之值。

33. 题 6.8.3-33 图所示正弦稳态电路，已知 $I_1 = 10\text{A}$，$I_2 = 10\sqrt{2}\text{A}$，$U_S = 100\text{V}$，$R = 5\Omega$ 且 $R_2 = X_L$。试求 I、X_C 及 R_2 之值。(提示：利用相量图，且设 $\dot{U}_2 = U_2\angle 0^\circ \text{V}$)



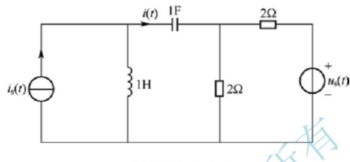
题 6.8.3-32 图　　　　题 6.8.3-33 图

34. 求题 6.8.3-34 图所示晶体管电路的诺顿等效电路。



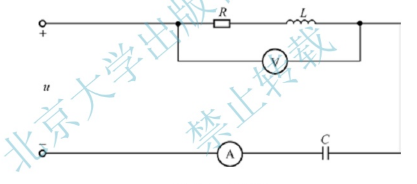
题 6.8.3-34 图

35. 求题 6.8.3-35 图电路中的电流 $i(t)$，已知 $u_s(t)=4\sqrt{2}\sin(3t)\text{V}$，$i_s(t)=7\sqrt{2}\sin(5t)\text{A}$。



题 6.8.3-35 图

36. 在 RLC 串联电路中如题 6.8.3-36 图所示，已知 $R=6\Omega$，$\omega L=2\Omega$，$-\dfrac{1}{\omega C}=-18\Omega$，$u=[10+80\sin(\omega t+30^\circ)+18\sin(3\omega t)]\text{V}$，试求电流 $i(t)$ 和图中各表的读数。



题 6.8.3-36 图